



Nichtkommutative Blochtheorie

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

im Fach Mathematik

eingereicht am 09.04.1998 an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Dipl. Phys. Michael Johannes Gruber

geboren am 06.01.1970 in Stuttgart

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Dr. h. c. Hans Meyer

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II

Prof. Dr. Bodo Krause

Gutachter

1. Prof. Dr. Jochen Brüning, HU Berlin

2. Prof. Dr. Victor Guillemin, MIT Cambridge

3. Prof. Dr. Ruedi Seiler, TU Berlin

Tag der mündlichen Prüfung: 01.10.1998

Vorwort

In der vorliegenden Arbeit „Nichtkommutative Blochtheorie“ beschäftigen wir uns mit der Spektraltheorie bestimmter Klassen von Hilbertraumoperatoren, den elliptischen Operatoren auf Darstellungsräumen von Hilbert- C^* -Moduln. Die auftretenden C^* -Algebren kodieren dabei Symmetrieeigenschaften der entsprechenden Operatoren.

Für kommutative Symmetrien ist die Blochtheorie ein geeignetes Hilfsmittel. Wir schildern diese Methode zunächst in einem geometrischen Kontext, der allgemein genug ist, um die bekannten Ergebnisse über die Abwesenheit singulärstetigen Spektrums im Hinblick auf physikalische Anwendungen zu erweitern.

Wir lassen uns dann durch eine Neuinterpretation der Blochtheorie aus einem nichtkommutativen Blickwinkel inspirieren zur Entwicklung einer nichtkommutativen Blochtheorie. Dabei werden bestimmte Eigenschaften von C^* -Algebren verknüpft mit Eigenschaften des Spektrums elliptischer Operatoren. Diese Blochtheorie für Hilbert- C^* -Moduln erlaubt es, verschiedene bekannte Resultate aus dem Bereich kommutativer (diskreter und kontinuierlicher) Geometrien mit nichtkommutativen Symmetrien in einem neuen gemeinsamen Rahmen zusammenzufassen, der Raum läßt für Modelle nichtkommutativer Geometrien mit nichtkommutativen Symmetrien.

Wichtigstes Beispiel für die behandelte Klasse von Operatoren in der mathematischen Physik sind die Schrödingeroperatoren mit periodischem Magnetfeld und Potential. Wir ordnen sie in den Rahmen kommutativer und nichtkommutativer Blochtheorie ein und wenden die zuvor bereitgestellten Methoden an.

In this doctoral thesis “Nichtkommutative Blochtheorie” (non-commutative Bloch theory) we investigate the spectral theory of a certain class of operators on Hilbert space: the elliptic operators associated with representations of Hilbert C^* -modules. The C^* -algebras that arise encode symmetry properties of the corresponding operators.

For commutative symmetries Bloch theory is a proper tool. We describe this method in a geometric context which is general enough to extend known results about absence of singular continuous spectrum in view of physical applications.

Then — inspired by a new interpretation of Bloch theory from a non-commutative point of view — we develop a non-commutative Bloch theory. Here certain properties of C^* -algebras get linked to spectral properties of elliptic operators. This Bloch theory for Hilbert C^* -modules allows to unite, in a new common framework, several known results from the field of commutative (discrete and continuous) geometries having non-commutative symmetries;

this leaves ample room for models of non-commutative geometries having non-commutative symmetries.

In mathematical physics, the most important example for the class of operators considered is given by the Schrödinger operators with periodic magnetic field and potential. We place them into the framework of commutative and non-commutative Bloch theory and apply the methods developed before.

Herrn Prof. Dr. Jochen Brüning danke ich für seine Unterstützung auf meinem Weg zum mathematischen Physiker und für die Betreuung dieser Arbeit.

Einige Hinweise zur Notation sind im Anhang auf Seite 115 zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
1 Einleitung	1
1.1 Ein einleitendes Beispiel	2
1.2 Von der Blochtheorie zu Hilbert- C^* -Moduln	3
1.3 Ergebnisübersicht der Spektraltheorie	5
1.4 Originäre Resultate	9
2 Kommutative Blochtheorie	11
2.1 Standardform der kommutativen Blochtheorie	12
2.2 Nichtkommutative Form der kommutativen Blochtheorie	21
3 Nichtkommutative Blochtheorie	25
3.1 Definition	26
3.2 Spektraltheorie	31
3.3 Beispiele	40
4 Eichperiodische elliptische Operatoren	43
4.1 Grundlegende Definitionen und Folgerungen	44
4.2 Hilbertraumoperatoren	48
4.3 Hilbertmoduloperatoren	51
4.4 Spezialfälle	54
5 Quantisierung mit Magnetfeld	55
5.1 Äquivalenzklassen von Quantisierungen	56
5.2 Zusammenhänge	63
5.3 Periodische Magnetfelder	65
5.4 Eichperiodische magnetische Schrödingeroperatoren	67
6 Spektraltheorie für Beispielklassen	71
6.1 Eichperiodische elliptische Operatoren	72
6.2 Periodische elliptische Operatoren	72

7	Schluß	81
7.1	Ein abschließendes Beispiel	81
7.2	Ausblick	82
A	GNS-Darstellung und Tomita-Takesaki-Involution	83
A.1	Links- und Rechtsmodulstrukturen	83
A.2	GNS-Darstellung für Hilbert- C^* -Moduln	86
A.3	Tomita-Takesaki-Involution	87
B	Getwistete verschränkte Produkte	89
B.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	90
B.2	Getwistete Gruppen- C^* -Algebren	93
B.3	Twistäquivalente KK-Theorie	96
B.4	Beispiele	99
C	Stetige Felder von C^*-Algebren	101
C.1	Definition und Eigenschaften	102
C.2	Dixmier-Douady-Invariante	103
	Literaturverzeichnis	107
	Index	111
	Notation	115
	Lebenslauf	117
	Erklärung	119

Kapitel 1

Einleitung

In diesem Kapitel unternehmen wir nach einem einleitenden Beispiel eine tour de force von der Blochtheorie zu Hilbert- C^* -Moduln, die uns die wesentlichen Objekte dieser Arbeit vorstellen wird, ohne auf die genauen Definitionen einzugehen. Im dritten Abschnitt vergleichen wir die bekannten und neuen Resultate in der Spektraltheorie verschiedener Klassen eichperiodischer Operatoren, um danach die originären Resultate dieser Arbeit zusammenzustellen.

1.1	Ein einleitendes Beispiel	2
1.1.1	Theorem: Spektrum des magnetischen Schrödingeroperators mit Fluß 0 . . .	2
1.1.2	Theorem: Spektrum des magnetischen Schrödingeroperators mit rationalem Fluß	3
1.1.3	Theorem: Spektrum des magnetischen Schrödingeroperators mit irrationalem Fluß	3
1.2	Von der Blochtheorie zu Hilbert-C^*-Moduln	3
1.2.1	Kommutative Symmetrie	3
1.2.2	Kommutative Symmetrie aus einem nichtkommutativen Blickwinkel	4
1.2.3	Nichtkommutative Symmetrie	5
1.3	Ergebnisübersicht der Spektraltheorie	5
1.3.1	Definition: Bloch- und Schnol-Eigenschaft	5
1.3.2	Bemerkung: $SSSP \Rightarrow WBP$	6
1.3.3	Definition: Kadisoneigenschaft	6
1.3.4	Definition: Bandstruktur	6
1.3.5	Definition: RRl_0	6
1.3.6	Bemerkung: Erläuterungen zur Tabelle	6

1.4 Originäre Resultate 9

1.1 Ein einleitendes Beispiel

Als „Vater aller eichperiodischen Operatoren“ betrachten wir den Schrödingeroperator mit periodischem Magnetfeld auf dem \mathbb{R}^2 . Dazu sei $B \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ das **Magnetfeld** und $b := B dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ die zugehörige 2-Form. Da $db = 0$ ist, können wir $a = a_x dx + a_y dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ finden mit $da = b$. Das zu a gehörende Vektorfeld $A := a_x \partial_x + a_y \partial_y \in C^\infty(T\mathbb{R}^2)$ heißt **Vektorpotential** zu B .

Weiterhin bezeichnen wir mit ∇ den Gradienten auf \mathbb{R}^2 . Der Landauoperator ist dann definiert durch

$$\begin{aligned} H^a &:= (-i\nabla - A)^2 \\ &= \Delta - 2i\langle A | \nabla \rangle - i \operatorname{div} A + |A|^2. \end{aligned}$$

Mit Δ bezeichnen wir hier den positiven Laplaceoperator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Ist $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ein glattes Potential, so ist $H := H^a + V$ der **magnetische Schrödingeroperator**.

Weiterhin operiert auf \mathbb{R}^2 das Gitter \mathbb{Z}^2 via Translationen. Wir setzen voraus, daß B und V diesbezüglich \mathbb{Z}^2 -periodisch sind. Im allgemeinen folgt daraus jedoch nicht die \mathbb{Z}^2 -Periodizität von A : Wir definieren den magnetischen Fluß pro Gitterzelle durch

$$\begin{aligned} \Phi &:= \int_{[0,1]^2} B(x, y) dx dy \\ &= \int_{[0,1]^2} b \\ &= \int_{[0,1]^2} da \\ &= \int_{\partial[0,1]^2} a. \end{aligned}$$

Ist a periodisch, so ist offenbar $\Phi = 0$. In diesem Fall vertauscht H mit allen Translationen, und die Blochtheorie liefert:

1.1.1 Theorem (Spektrum des magnetischen Schrödingeroperators mit Fluß 0)

Für magnetischen Fluß 0 hat das Spektrum des Schrödingeroperators mit periodischem Magnetfeld und Potential kein singulärstetiges Spektrum (nach Hempel & Herbst, 1995) und kein Punktspektrum (nach Birman & Suslina, 1998).

Ist B jedoch konstant, so ist $\Phi = B$ und damit im allgemeinen nicht 0. H vertauscht nicht mehr mit den Translationen. Definieren wir geeignete magnetische Translationen (siehe 5.4.2 auf Seite 67), so vertauschen diese zwar mit H , aber nicht mehr untereinander.

1.1.2 Theorem (Spektrum des magnetischen Schrödingeroperators mit rationalem Fluß)

Für rationalen Fluß hat das Spektrum des Schrödingeroperators mit periodischem Magnetfeld und Potential Bandstruktur (siehe z.B. Brüning & Sunada, 1992b).

Helfffer & Sjöstrand (1989) zeigen:

1.1.3 Theorem (Spektrum des magnetischen Schrödingeroperators mit irrationalem Fluß)

Seien $V, A, B \in \mathbb{Z}^2$ -periodisch und invariant unter der Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (-y, x)$. Weiterhin habe V modulo \mathbb{Z}^2 genau ein Minimum, und dieses Minimum sei nicht entartet. Obda sei dieses Minimum $V(0) = 0$.

Die bezüglich der Agmonmetrik nächsten Punkte bei 0 in $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ seien genau diejenigen mit euklidischer Norm 1. Zwischen jedem solchen Punkt und 0 gebe es genau eine minimale Geodätische, diese sei nicht entartet, und in deren Umgebung seien V und B analytisch.

Dann gibt es Konstanten $C, \varepsilon > 0$, so daß gilt: Ist der magnetische Fluß Φ pro Gitterzelle kleiner als ε , irrational und besitzt eine Kettenbruchentwicklung mit Nennern größer als C , so gibt es ein nichtleeres Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so daß $I \cap \text{spec} H$ eine Cantormenge vom Maß 0 ist.

Diese drei Ergebnisse zeigen bereits eine breite Vielfalt von möglichen spektralen Effekten in Abhängigkeit von Φ bei ein und demselben Operator. Wir nehmen in dieser Arbeit die speziellen Symmetrieeigenschaften des Schrödingeroperators mit periodischem Magnetfeld als Motivation für die Modellbildung. Neben einer geometrischen Variante der Blochtheorie, die eine Erweiterung von 1.1.1 für rationalen Fluß erlaubt, wollen wir vor allem eine nichtkommutative Blochtheorie entwickeln, die es erlaubt, die beiden gegensätzlichen Fälle 1.1.2 und 1.1.3 in einer gemeinsamen Sprache zu verstehen, die die spektralen Eigenschaften durch Eigenschaften der beteiligten Symmetrieralgebren erklärt.

1.2 Von der Blochtheorie zu Hilbert- C^* -Moduln

1.2.1 Kommutative Symmetrie

Die Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen verdankt viele ihrer zugänglichsten Ergebnisse der Verwendung von Transformationen, die den Symmetrien der jeweiligen Situation angepaßt sind. So führt die Fouriertransformation auf dem \mathbb{R}^n lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten über in algebraische Gleichungen. \mathbb{R}^n trägt eine transitive, freie, eigentliche, kokompakte Aktion der Gruppe \mathbb{R}^n durch Translationen, so daß Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten gerade die mit dieser Aktion vertauschenden sind.

Wir betrachten nun allgemeiner eine riemannsche Mannigfaltigkeit X mit einer Linksaktion einer lokal kompakten Gruppe Γ . Verzichtet man auf Transitivität, so wird der Quotient $M := \Gamma \backslash X$ eine entscheidende Rolle spielen. Damit M ein Hausdorffraum wird, fordern wir, daß die Aktion eigentlich unstetig ist. Ist die Aktion frei und Γ diskret, so erbt M von X

die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, ist sie isometrisch, so wird M riemannsch. Ist D ein symmetrischer Differentialoperator auf X , der mit der Γ -Aktion vertauscht, so können wir zu D einen Operator D_M auf M assoziieren. D_M allein bestimmt aber noch nicht die Spektraltheorie von D .

Ist Γ abelsch, so gibt es immer noch eine Fouriertransformation $L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\hat{\Gamma})$, wenn $\hat{\Gamma}$ die (abelsche) Gruppe der eindimensionalen unitären Darstellungen von Γ ist (Charaktergruppe). Die kommutative Blochtheorie in ihrer Standardform (Abschnitt 2.1) besteht nun in der Konstruktion eines direkten Integrals von Hilberträumen

$$L^2(X) \simeq \int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} H_{\chi} d\chi,$$

so daß D eine entsprechende Zerlegung

$$D \simeq \int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} D_{\chi} d\chi$$

besitzt. D_M taucht als D_1 für den trivialen Charakter auf. Die allgemeine Theorie der direkten Integrale erlaubt dann die Bestimmung des Spektrums von D aus den Eigenschaften der D_{χ} . Wesentlich hierbei ist, daß für elliptisches D die Fasern D_{χ} elliptische Operatoren auf einer kompakten Mannigfaltigkeit sind und daher vergleichsweise einfache spektrale Eigenschaften haben. Darüberhinaus ist die Familie $(D_{\chi})_{\chi \in \Gamma}$ stetig, woraus letztlich die Bandstruktur des Spektrums von D folgt.

1.2.2 Kommutative Symmetrie aus einem nichtkommutativen Blickwinkel

Ist Γ nichtabelsch oder sind wir gezwungen, nichtabelsche geeichte Aktionen für die Berücksichtigung periodischer Magnetfelder einzuführen, so steht die Fouriertransformation abelscher lokal kompakter Gruppen und damit die Blochtheorie nicht mehr zur Verfügung. Einen ersten Anhaltspunkt für das weitere Vorgehen liefert die Suche nach einem Ersatz für $\hat{\Gamma}$: Ein topologischer Raum Y ist charakterisiert durch seine kommutative C^* -Algebra von komplexwertigen, stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen $C_{\infty}(Y)$. Im abelschen Fall ist $C(\hat{\Gamma})$ gerade die Gruppen- C^* -Algebra $C^*(\Gamma)$ von Γ , d. h. die C^* -Einhüllende des Gruppenrings $\mathbb{C}\Gamma$, mit der Fouriertransformation als Isomorphismus $C(\hat{\Gamma}) \simeq C^*(\Gamma)$. $C^*(\Gamma)$ existiert aber auch für nichtabelsches Γ und ersetzt die Funktionenalgebra über einem „nichtkommutativen topologischen Raum“ $\hat{\Gamma}$. Um auch die Blochtheorie zu erweitern in eine Zerlegung über einem nichtkommutativen Raum, stellen wir zunächst die kommutative Blochtheorie gänzlich in Termen von $C(\hat{\Gamma})$ dar, ohne explizite Benutzung von $\hat{\Gamma}$ (Abschnitt 2.2).

Das meßbare Feld von Hilberträumen H_{χ} des direkten Integrals gibt den nächsten Anhaltspunkt, wenn man es als $L^{\infty}(\hat{\Gamma})$ -Modul betrachtet und bemerkt, daß $L^{\infty}(\hat{\Gamma})$ der W^* -Abschluß von $C(\hat{\Gamma})$ ist. Die Stetigkeitseigenschaften bezüglich $\chi \in \Gamma$, die für das Bandspektrum verantwortlich zeichneten, legen nahe, diese gleich in die Struktur zu integrieren, indem man

eine geeignete $C(\hat{\Gamma})$ -Modulstruktur konstruiert. Tatsächlich ist dies in der geometrischen Situation, die der Blochtheorie zugrunde liegt, möglich. Die Hilbertraumstruktur der Fasern H_χ liefert darüberhinaus ein $C(\hat{\Gamma})$ -wertiges Skalarprodukt, so daß wir insgesamt die Struktur eines Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Moduls vorliegen haben. Diese ist äquivalent zur Struktur eines stetigen Feldes von Hilberträumen mit Fasern H_χ . Wir haben also aus dem meßbaren Feld und den geometrischen Eigenschaften ein stetiges Feld erhalten, periodische Operatoren werden zu Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Moduloperatoren.

1.2.3 Nichtkommutative Symmetrie

Nun sind wir in der Lage, den Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Modul durch einen Hilbertmodul über einer nichtkommutativen C^* -Algebra \mathcal{A} zu ersetzen und eine nichtkommutative Blochtheorie zu betreiben (Kapitel 3). Für abstrakte \mathcal{A} -Moduloperatoren definieren wir einen Elliptizitätsbegriff. Er erlaubt einerseits, „wie üblich“ Spektraltheorie zu betreiben. So werden die Eigenräume isolierter Eigenwerte endlich erzeugte \mathcal{A} -Moduln sein in Analogie zur endlichen Vielfachheit der Eigenwerte elliptischer Operatoren. Andererseits haben wir eine verallgemeinerte Blochtheorie in dem Sinne, daß sich aus Eigenschaften des nichtkommutativen Raumes \mathcal{A} , über dem wir unseren Operator zerlegen, spektrale Eigenschaften wie Bandstruktur, schwache Generizität von Cantorspektrum und Abwesenheit von diskretem Spektrum herleiten lassen.

1.3 Ergebnisübersicht der Spektraltheorie

Dieser Abschnitt gibt nach der Definition der auftauchenden Begriffe eine Übersicht der Spektraltheorie verschiedener Klassen von eichperiodischen elliptischen Operatoren.

1.3.1 Definition (Bloch- und Schnol-Eigenschaft)

Sei A ein Differentialoperator auf den glatten Schnitten eines hermiteschen Vektorraumbündels E über einer orientierbaren riemannschen Mannigfaltigkeit X . A induziert dann kanonisch einen Operator auf den distributiven Schnitten, insbesondere auf den L^p -Schnitten, $1 \leq p \leq \infty$.

1. A hat die **schwache Blocheigenschaft (weak Bloch property, WBP)**, falls

$$\left(\exists s \in C^\infty(E) \cap L^\infty(E) \setminus \{0\} \quad As = \lambda s \right) \Rightarrow \lambda \in \text{spec}(A).$$

2. A hat die **umgekehrte Blocheigenschaft (reverse Bloch property, RBP)**, falls

$$\forall \lambda \in \text{spec}(A) \quad \exists s \in L^\infty(E) \setminus \{0\} \quad As = \lambda s.$$

3. A hat die **schwache Schnoleigenschaft (weak Schnol property, WSP)**, falls

$$\left(\exists x_0 \in X, N \in \mathbb{N}, s \in C^\infty(E) \setminus \{0\} \quad |s(x)| = O\left(1 + d(x, x_0)^N\right) \wedge As = \lambda s \right) \Rightarrow \lambda \in \text{spec}(A).$$

4. A hat die **starke Schnoleigenschaft (strong Schnol property, SSP)**, falls

$$\left(\exists_{x_0 \in X, s \in C^\infty(E) \setminus \{0\}} \forall_{\varepsilon > 0} |s(x)| = O\left(e^{\varepsilon d(x, x_0)}\right) \wedge As = \lambda s \right) \Rightarrow \lambda \in \text{spec}(A).$$

5. A hat die **superstarke Schnoleigenschaft (super strong Schnol property, SSSP)**, falls

$$\left(\exists_{x_0 \in X} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{s_\varepsilon \in C^\infty(E) \setminus \{0\}} |s_\varepsilon(x)| = O\left(e^{\varepsilon d(x, x_0)}\right) \wedge As_\varepsilon = \lambda s_\varepsilon \right) \Rightarrow \lambda \in \text{spec}(A).$$

Dabei ist O jeweils für $d(x, x_0) \rightarrow \infty$ zu lesen.

1.3.2 Bemerkung (SSSP \Rightarrow WBP)

SSSP \Rightarrow SSP \Rightarrow WSP \Rightarrow WBP. Diese Definitionen richten sich nach Shubin (1992).

1.3.3 Definition (Kadisonseigenschaft)

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra und τ eine treue Spur. Wir definieren die **Kadisonkonstante** von \mathcal{A} bezüglich τ durch

$$c_K = \inf_{P \in \text{Proj}(\mathcal{A}) \setminus 0} \tau(P)$$

und sagen, daß \mathcal{A} die **Kadisonseigenschaft** bezüglich τ hat, wenn $c_K > 0$ ist.

1.3.4 Definition (Bandstruktur)

Sei C eine Teilmenge von \mathbb{R} . Man sagt, C hat **Bandstruktur**, falls C eine lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist.

Im Vorgriff auf 3.2.5 auf Seite 36 definieren wir:

1.3.5 Definition (RRI_0)

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra mit einem treuen Zustand Φ . Wir sagen, daß \mathcal{A} **reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand** hat (RRI_0), wenn jedes selbstadjungierte Element von \mathcal{A} beliebig gut approximierbar ist durch ein Element mit endlichem Spektrum, das so gewählt werden kann, daß Φ auf dessen minimalen Spektralprojektionen einen beliebig kleinen Wert annimmt.

1.3.6 Bemerkung (Erläuterungen zur Tabelle)

In der Tabelle auf Seite 8 sind verschiedene Unterklassen von eichperiodischen elliptischen Operatoren mit Kozyklus Θ auf Schnitten in Vektorraumbündel (siehe 4.1.4 auf Seite 45) aufgeführt. $\Delta + V$ bezeichnet den üblichen Schrödingeroperator auf Funktionen mit einem glatten, periodischen Potential V . $H^{L, \nabla} + V$ ist der magnetische Schrödingeroperator auf einem Linienbündel L zu einer Quantisierung (L, h, ∇) für periodisches Magnetfeld und Potential (siehe 5.1.2 auf Seite 57). Für diese Operatoren vergleichen wir folgende spektralen Eigenschaften:

BP/SP Bloch- und Schnoleigenschaft gemäß 1.3.1 auf Seite 5. Kobayashi, Ono & Sunada (1989) zeigen für periodische Schrödingeroperatoren die schwache Blocheigenschaft bei Γ mit subexponentiellem Wachstum, schwache und umgekehrte Blocheigenschaft für abelsches Γ und die Folgerung „WBP $\Rightarrow \Gamma$ amenabel“.

Die umgekehrte Blocheigenschaft für periodische elliptische Operatoren folgt für abelsches Γ aus der kommutativen Blochtheorie (siehe 6.2.5 auf Seite 74). Shubin (1992) untersucht für riemannsche Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Geometrie elliptische Operatoren mit gleichmäßig C^∞ -beschränkten Koeffizienten. Er zeigt die superstarke Schnoleigenschaft für solche Operatoren auf Mannigfaltigkeiten mit subexponentiellem Wachstum. riemannsche Mannigfaltigkeiten X mit kokompakter Aktion einer Gruppe Γ sind von beschränkter Geometrie; hat Γ subexponentielles Wachstum, so auch X . Periodische Operatoren haben gleichmäßig C^∞ -beschränkte Koeffizienten, für eichperiodische Operatoren ist dies eine zusätzliche Bedingung („BG“).

Fuchsche Gruppen sind nicht amenabel, daher gilt die schwache Blocheigenschaft nicht.

$\lambda_0(X) \mathcal{R} \lambda_0(M)$ bezeichnet die Beziehung, die zwischen der Unterkante der Spektren von D auf X und $M = \Gamma \backslash X$ besteht, und ist daher nur für periodische, nach unten beschränkte Operatoren sinnvoll. Die aufgeführten Resultate sind bei Kobayashi et al. (1989) nachzulesen. Es sei noch darauf hingewiesen, daß es Beispiele von nach unten beschränkten elliptischen Operatoren gibt, die diese Relationen verletzen. Sie sind (bei nichtabelschen Gruppen) also eine spezielle Eigenschaft der Schrödingeroperatoren im Gegensatz zu allgemeinen elliptischen Operatoren.

Band-/Cantorspektrum „Band“ heißt, daß Bandstruktur vorliegt, „ $c_K > 0/\text{RRI}_0$ “, daß aus der Kadisoneigenschaft der jeweiligen getwisteten oder ungetwisteten Gruppen- C^* -Algebra Bandstruktur folgt, aus dem reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand dagegen die Dichtheit der Elemente mit Cantorspektrum in allen selbstadjungierten, also in einem schwachen Sinn Generizität von Cantorspektrum. „ $c_K > 0$ “ und „ RRI_0 “ schließen sich gegenseitig aus (siehe 3.2.6 auf Seite 39). Im Falle $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$ und für Fuchsche Gruppen in Dimension 2 ist bei rationalem magnetischen Fluß die Kadisoneigenschaft gegeben, im Falle $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$ liegt bei irrationalem Fluß RRI_0 vor (siehe B.4.2 und B.4.3 auf Seite 100).

Bandstruktur für abelschperiodische Schrödingeroperatoren ist wohlbekannt, für eichperiodische elliptische Operatoren zeigen dies Brüning & Sunada (1992b, 1996), falls die Kadisoneigenschaft gegeben ist. In der vorliegenden Arbeit verwenden wir diese Methode für \mathcal{A} -elliptische Operatoren (Theorem 3.2.3 auf Seite 33). Das Kriterium „ RRI_0 “ für Generizität von Cantorspektrum zeigen wir in Theorem 3.2.4 auf Seite 34 für \mathcal{A} -elliptische Operatoren.

Natur von spec Für alle in der Tabelle auftretenden Operatoren gilt, daß alle Eigenwerte unendliche Vielfachheit haben, also $\text{spec}_{disc} = \emptyset$ ist, da die Voraussetzungen von

	$X = \mathbb{R}^n, \Gamma \simeq \mathbb{Z}^n, \gamma x = \gamma + x$			$X = \mathbb{H}^n, \Gamma$ Fuchs	
	$D = \Delta + V$	$D = H^{L,V} + V$		$D = \Delta + V$	$D = H^{L,V} + V$
		$\Theta \equiv 1$	$\Theta \neq 1$		
BP/SP	SSSP,RBP	SSSP,RBP	BG \Rightarrow SSSP	/	/
$\lambda_0(X) \mathcal{R} \lambda_0(M)$	=	=	nicht anwendbar	>	nicht anwendbar
Band-/Cantorsp.	Band	Band	$c_K > 0 / \text{RRI}_0$	$c_K > 0 / \text{RRI}_0$	$c_K > 0 / \text{RRI}_0$
Natur von spec	spec = spec _{a.c.}	$\exists : \# \text{spec}_{p,p.} = \infty;$ spec _{s.c.} = \emptyset , spec _{p,p.} diskret; spec = spec _{a.c.} für Fluß 0	$\exists : \# \text{spec}_{p,p.} = \infty$		$\exists : \text{spec}_{p,p.} \neq \emptyset$
Lückenasymp.	$O(\gamma^{-1/2})$			$O(\gamma^{-1/2})$	
Lückenzahl	$n = 1 : \text{gener. } \infty$ $2 \leq n \leq 5 : \text{endl.}$				
	XMfg., Γ abelsch			XMfg., Γ bel.	
	$D = \Delta + V$	D ellipt., symm.		$D = \Delta + V$	D ell., symm.
		$\Theta \equiv 1$	$\Theta \neq 1$		
BP/SP	SSSP,RBP	RBP BG \Rightarrow SSSP	BG \Rightarrow SSSP	Γ subexp. \Rightarrow SSSP WBP $\Rightarrow \Gamma$ amenabel	Γ subexp. \wedge BG \Rightarrow SSSP
$\lambda_0(X) \mathcal{R} \lambda_0(M)$	=			\geq „ $=$ “ $\Leftrightarrow \Gamma$ amenabel	
Band-/Cantorsp.	Band	Band	$c_K > 0 / \text{RRI}_0$	$c_K > 0 / \text{RRI}_0$	$c_K > 0 / \text{RRI}_0$
Natur von spec	spec _{s.c.} = \emptyset , spec _{p,p.} diskret; $\exists_{\varepsilon > 0}$	$\exists : \# \text{spec}_p = \infty;$ spec _{s.c.} = \emptyset , spec _{p,p.} diskret			
	$[\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon] \subset \text{spec}_c$				

Übersicht zur Spektraltheorie; für Erläuterungen der Einträge siehe 1.3.6 auf Seite 6.

Theorem 3.2.2 auf Seite 33 für \mathcal{A} -elliptische Operatoren erfüllt sind. Dies ist eine Konsequenz aus der Existenz „unendlich vieler Symmetrien“. Es gibt Beispiele mit unendlich vielen verschiedenen Eigenwerten ($\exists : \text{spec}_{p.p.} = \infty$) für (strikt) periodische elliptische Operatoren auf Mannigfaltigkeiten (Kobayashi et al., 1989) und für (geeicht) periodische elliptische Operatoren (Landauoperator bei ganzzahligem Fluß); siehe Definition 6.2.1 auf Seite 72 für diese Begriffe. Der Landauoperator auf der oberen Halbebene hat eine endliche Zahl von Eigenwerten (Comtet, 1987).

$\text{spec}_{p.p.} = \emptyset$ wurde von Thomas (1973) für periodische Schrödingeroperatoren auf \mathbb{R}^n bewiesen, von Birman & Suslina (1998) für den (strikt) periodischen magnetischen Schrödingeroperator (Fluß 0, siehe Beispiel 5.4.1 auf Seite 67) auf \mathbb{R}^2 , von Sobolev (1997) auf $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

$\text{spec}_{s.c.} = \emptyset, \text{spec}_{p.p.}$ diskret (als Teilmenge von \mathbb{R}) wurde von Thomas (1973) für Schrödingeroperatoren auf \mathbb{R}^n bewiesen, von Hempel & Herbst (1995) für (strikt) periodische magnetischen Schrödingeroperator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Wir erweitern diese Methode für abelschperiodische elliptische Operatoren auf Schnitten in Vektorraumbündel (Theorem 6.2.9 auf Seite 77). Darunter fallen insbesondere auch die (geeicht) periodischen Operatoren, zu denen die magnetischen Schrödingeroperatoren mit rationalem Fluß gehören; sie sind nicht strikt periodisch, wenn der Fluß nicht verschwindet.

Lückenasympotik Ist $(\alpha, \beta) \cap \text{spec} D = \emptyset$, so kann man sich fragen, welcher Zusammenhang zwischen Lückenbreite $\beta - \alpha$ und dem Mittelunkt $\gamma := \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ besteht. Eastham (1973) zeigt, daß die Lückenbreite für periodische Schrödingeroperatoren durch $C\gamma^{-1/2}$ beschränkt ist, insbesondere also gegen 0 geht für $\gamma \rightarrow \infty$. Karp & Peyerimhoff (1998) zeigen die gleiche Abschätzung für periodische Schrödingeroperatoren auf dem hyperbolischen Raum. Mit derselben Methode erhält man dieses Resultat auch für den magnetischen Schrödingeroperator mit konstantem Magnetfeld auf der oberen Halbebene (Gruber, 1997).

Lückenzahl Für periodische Schrödingeroperatoren auf dem $\mathbb{R}^n, n > 1$, besagt die Bethe-Sommerfeld-Vermutung, daß es nur endlich viele spektrale Lücken gibt¹. Skriganov (1979, 1985) beweist dies in Dimension 2 und 3, Veliev (1990) für 4 und 5.

1.4 Originäre Resultate

Auf dem Weg von der kommutativen zur nichtkommutativen Blochtheorie erläutert diese Arbeit sowohl bekannte als auch originäre Resultate. Erstere sind im Text mit den entsprechenden Quellenangaben gekennzeichnet, letztere werden hier kurz aufgelistet.

- Hilbert- C^* -Moduln sind bekannte Objekte in der Indextheorie. Spektraltheorie wurde dagegen hauptsächlich für selbstduale Hilbert- W^* -Moduln betrieben, wobei hier auf Diagonalisierbarkeit innerhalb der Moduloperatoren untersucht wird (siehe z. B.

¹In Dimension 1 gibt es generisch unendlich viele Lücken.

Frank & Manuilov, 1995). Neu ist die Verwendung von Hilbert- C^* -Moduln als Hilfsmittel für die Spektraltheorie von Hilbertraumoperatoren in dem allgemeinen in Kapitel 3 beschriebenen Sinne. Originäre Resultate für abstrakte \mathcal{A} -elliptische Operatoren sind:

- Bandstrukturkriterium (Theorem 3.2.3)
- Eigenschaften von Eigenräumen isolierter Eigenwerte und Abwesenheit von diskretem Spektrum (Theorem 3.2.2)
- schwache Generizität von Cantorspektrum (Theorem 3.2.4)

Diese drei Resultate waren bislang für eichperiodische resp. periodische elliptische Operatoren resp. beschränkte Operatoren bekannt.

- Kommutative Blochtheorie findet man üblicherweise für Schrödingeroperatoren auf einem Funktionenraum $L^2(X)$. Wir explizieren in Abschnitt 2.1 die kommutative Blochtheorie für elliptische Operatoren auf Schnitten in Vektorraumbündel und wenden sie für zwei Fragestellungen an:
 - Zusammenhang zwischen Blochtheorie und Äquivalenzklassen von Quantisierungen (Theorem 5.3.2 und Korollar 5.3.3): Die nötigen Grundlagen aus der geometrischen Quantisierung sind wohlbekannt, der Zusammenhang mit der Blochtheorie wurde bislang nur für den 2-Torus dargestellt.
 - spektrale Natur abelschperiodischer elliptischer Operatoren (Theorem 6.2.9): Dies erweitert die für strikt periodische magnetische Schrödingeroperatoren auf dem \mathbb{R}^n bekannten Resultate. Für den magnetischen Schrödingeroperator bedeutet dies den Schritt vom magnetischen Fluß 0 zu rationalem Fluß.

Kapitel 2

Kommutative Blochtheorie

Lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führt man bekanntlich mittels Fouriertransformation in algebraische Gleichungen über. Sind die Koeffizienten nicht konstant, sondern nur „konstant unter einer Gruppenaktion“, so liegt es nahe, die Fouriertransformation auf (lokal kompakten abelschen) Gruppen zu verwenden. Nach einer Darstellung dieser kommutativen Blochtheorie in der üblichen Form (2.1) interpretieren wir sie in der Sprache der nichtkommutativen Topologie (2.2).

2.1	Standardform der kommutativen Blochtheorie	12
2.1.1	Definition und Hilfssatz: L^2 -Schnitte	12
2.1.2	Definition und Hilfssatz: minimaler Abschluß	12
2.1.3	Definition und Hilfssatz: Aktion auf Funktionen	13
2.1.4	Definition: Fundamentalbereich	14
2.1.5	Definition und Hilfssatz: abelschperiodischer Operator	14
2.1.6	Lemma: assoziierte Bündel	14
2.1.7	Lemma: Charakterrelationen	16
2.1.8	Definition: meßbares Feld von Hilberträumen	16
2.1.9	Lemma: definierende Schnitte	17
2.1.10	Definition: direktes Integral	17
2.1.11	Definition und Hilfssatz: Operatoren auf Feldern von Hilberträumen	17
2.1.12	Lemma: direktes Integral und Spektrum	17
2.1.13	Lemma: direktes Integral	19
2.1.14	Hilfssatz: $C(\hat{\Gamma})$ -Aktion	19
2.1.15	Korollar: Charakterisierung zerlegbarer Operatoren	19
2.1.16	Theorem: Zerlegung eines periodischen Operators	20

2.1.17	Bemerkung: Spektraltheorie	20
2.2	Nichtkommutative Form der kommutativen Blochtheorie	21
2.2.1	Definition und Hilfssatz: Prä-Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Modul	21
2.2.2	Definition und Hilfssatz: Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Modul und GNS-Darstellung	22
2.2.3	Hilfssatz: stetiges Feld von Hilberträumen über $\hat{\Gamma}$	23
2.2.4	Theorem: Zerlegung eines periodischen Operators	24

2.1 Standardform der kommutativen Blochtheorie

2.1.1 Definition und Hilfssatz (L^2 -Schnitte)

(X, g) sei eine glatte, orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit, (E, h^E) ein hermitesches¹ Vektorraumbündel über X . Auf den glatten Schnitten in E mit kompaktem Träger, $C_c^\infty(E)$, definiert

$$C_c^\infty(E) \times C_c^\infty(E) \ni (s_1, s_2) \mapsto \langle s_1 | s_2 \rangle_{L^2(E)} := \int_X h^E(s_1(x), s_2(x)) d\text{vol}_X(x) \in \mathbb{C} \quad (2.1.1)$$

ein Skalarprodukt. Die Vervollständigung von $C_c^\infty(E)$ bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2(E)}$ sei mit $L^2(E)$ bezeichnet. Im Falle des trivialen Bündels $E = X \times \mathbb{C}$ mit konstanter Fasermetric schreibt man $L^2(X \times \mathbb{C}) = L^2(X)$.

2.1.2 Definition und Hilfssatz (minimaler Abschluß)

(F, h^F) sei ein weiteres hermitesches Vektorraumbündel und $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ ein Differentialoperator. Betrachtet man D auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(D) := C_c^\infty(E)$, so wird D zu einem abschließbaren, unbeschränkten Operator in $L^2(E)$. Der Abschluß wird mit \bar{D} bezeichnet.

Beweis Als Differentialoperator ist D transponierbar, d. h. es gibt einen Differentialoperator $D^\dagger : C^\infty(F) \rightarrow C^\infty(E)$, so daß für alle $s_1 \in C_c^\infty(E)$, $s_2 \in C_c^\infty(F)$ gilt:

$$\langle Ds_1 | s_2 \rangle_{L^2(F)} = \langle s_1 | D^\dagger s_2 \rangle_{L^2(E)} \quad (2.1.2)$$

¹Im Einklang mit der üblichen Konvention für Hilbertmoduln und der Konvention in der mathematischen Physik für Hilberträume fordern wir auch für eine hermitesche Metrik komplexe Linearität im rechten und Antilinearität im linken Eintrag.

Sei nun $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(D)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Ds_n = y \in L^2(F)$. Dann ist für alle $s \in C_c^\infty(F)$

$$\begin{aligned} \langle y | s \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} Ds_n \middle| s \right\rangle_{L^2(F)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Ds_n | s \rangle_{L^2(F)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n | D^\dagger s \rangle_{L^2(E)} \\ &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \middle| D^\dagger s \right\rangle_{L^2(E)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

somit ist D abschließbar. 2.1.2

Im folgenden werden wir stets $F = E$ annehmen.

2.1.3 Definition und Hilfssatz (Aktion auf Funktionen)

Sei Γ eine abelsche Gruppe, die auf (X, g) isometrisch operiert. Dann definiert

$$\begin{aligned} \Gamma \times C^\infty(X) &\ni (\gamma, f) \mapsto \gamma^* f, \\ \gamma^* f : X &\ni x \mapsto f(\gamma^{-1}x) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

eine Aktion von Γ auf $C^\infty(X)$, die auf $L^2(X)$ eine unitäre Aktion induziert. Faßt man γ auf als Abbildung $X \rightarrow X$, so ist $\gamma^* = (\gamma^{-1})^*$ mit der üblichen Definition des Rückzugs (pull back) $\Phi^* f := f \circ \Phi$ für $\Phi \in C^\infty(X, X)$.

Die Aktion heißt **frei**, wenn für $x \in X, \gamma \in \Gamma$ gilt: $\gamma x = x \Rightarrow \gamma = e$. Die Aktion heißt **eigentlich unstetig**, wenn für jedes kompakte $K \subset X$ gilt: Die Menge $\{\gamma \in \Gamma \mid K \cap \gamma K \neq \emptyset\}$ ist kompakt². Der Quotient $M := X/\Gamma$ einer freien eigentlich unstetigen Aktion ist eine glatte riemannsche Mannigfaltigkeit.

Die Aktion heißt **kokompakt**, wenn M kompakt ist.

Beweis Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, x \in X, f \in C^\infty(X)$ gilt:

$$\begin{aligned} (\gamma_1^* \gamma_2^* f)(x) &= (\gamma_2^* f)(\gamma_1^{-1}x) \\ &= f(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= f((\gamma_1 \gamma_2)^{-1}x) \\ &= ((\gamma_1 \gamma_2)^* f)(x) \end{aligned}$$

Da $\gamma \in \Gamma$ isometrisch bzgl. g auf X operiert, wird γ^* zu einer Isometrie bzgl. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $L^2(E)$. Wegen $(\gamma^{-1})^* = (\gamma^*)^{-1}$ ist γ^* auch invertierbar. 2.1.3

Wir setzen im folgenden die Existenz einer freien, eigentlich unstetigen, kokompakten Aktion einer diskreten abelschen Gruppe Γ voraus.

²Die beschriebene Menge ist also endlich, falls Γ diskret ist.

2.1.4 Definition (Fundamentalebereich)

Eine offene Menge $\mathcal{D} \subset X$ heißt **Fundamentalebereich** für die Γ -Aktion, falls

$$\mathcal{D} \cap \gamma \mathcal{D} = \emptyset \text{ für } \gamma \neq e \quad (2.1.4)$$

und

$$\overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{D}} = X. \quad (2.1.5)$$

Offene Fundamentalebereiche existieren immer, man kann sie z. B. mit Hilfe der Metrik konstruieren.

2.1.5 Definition und Hilfssatz (abelschperiodischer Operator)

Es gebe einen isometrischen **Lift** γ_* **der Aktion** von γ von X nach E in dem Sinne, daß

$$\gamma_* : E_x \rightarrow E_{\gamma x} \text{ für } x \in X, \gamma \in \Gamma. \quad (2.1.6)$$

Dies definiert eine Aktion T_γ auf den Schnitten: Für $s \in C_c^\infty(E)$ setzen wir

$$(T_\gamma s)(x) := \gamma_* s(\gamma^{-1}x) \text{ für } x \in X, \gamma \in \Gamma. \quad (2.1.7)$$

$(T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ induziert dann eine unitäre Darstellung von Γ auf $L^2(E)$.

Ein Differentialoperator D auf $\mathcal{D}(D) := C_c^\infty(E)$ heißt **abelschperiodisch**, falls auf $\mathcal{D}(D)$ gilt:

$$\forall_{\gamma \in \Gamma} [T_\gamma, D] = 0 \quad (2.1.8)$$

2.1.6 Lemma (assoziierte Bündel)

E ist der Lift $\pi^* E'$ eines hermiteschen Vektorraumbündels E' über M entlang der Projektion $\pi : X \rightarrow M$. E und X sind Γ -Prinzipalbündel über E' bzw. M .

Zu jedem Γ -Prinzipalbündel und jedem Charakter $\chi \in \hat{\Gamma}$ assoziieren wir ein Linienbündel. Die verschiedenen Bündelbeziehungen sind im Diagramm auf der anderen Seite dargestellt. („ \therefore “ bezeichnet die Assoziation eines Linienbündels.)

Es gilt dann $E_\chi \simeq E' \otimes F_\chi$.

Beweis E ist nach Voraussetzung ein Γ -Prinzipalbündel, so daß wir mittels der gelifteten Γ -Aktion $E' := E/\Gamma$ setzen können. Da diese Aktion ein Lift der Γ -Aktion auf X ist, wird E' in natürlicher Weise ein Vektorraumbündel über M . Ist $\pi^{E'} : E' \rightarrow M$ die Bündelprojektion von E' , so ist der pull back bezüglich π definiert durch

$$\pi^* E' = X \times_{\pi} E' = \{(x, e) \in X \times E' \mid \pi(x) = \pi^{E'}(e)\}.$$

Ist $\pi^E : E \rightarrow X$ die Bündelprojektion von E und $\pi_* : E \rightarrow E'$ die Quotientenabbildung, so erhalten wir einen Bündelisomorphismus $E \rightarrow \pi^* E'$ durch

$$E \ni e \mapsto (\pi^E(e), \pi_*(e)) \in \pi^* E'.$$

$$\begin{array}{ccccccc}
& \mathbb{C}^N & & \mathbb{C}^N & & \mathbb{C}^N & & \mathbb{C}^N \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma \hookrightarrow E & \longrightarrow & E' & \therefore & \mathbb{C} \hookrightarrow E_\chi & \longrightarrow & E' \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma \hookrightarrow X & \longrightarrow & M & \therefore & \mathbb{C} \hookrightarrow F_\chi & \longrightarrow & M
\end{array}$$

Prinzipalfaserbündel und assoziierte Vektorraumbündel

Daher operiert in dieser Darstellung der Lift γ_* von γ auf $(x, e) \in \pi^* E'$ gemäß $\gamma_*(x, e) = (\gamma x, e)$.

Schnitte in ein assoziiertes Bündel sind gerade die Schnitte in das darüberliegende Bündel mit dem richtigen Transformationsverhalten. E_χ ist nach Konstruktion zunächst ein komplexes Linienbündel über E' , erbt aber von E die Vektorraumbündelstruktur, so daß für diese Schnitte gilt:

$$C^\infty(E_\chi) \simeq C^\infty(E)^{\Gamma, \chi} = \{s \in C^\infty(E) \mid \forall_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* s = \chi(\gamma) s\} \quad (2.1.9)$$

Analoges gilt für das Linienbündel F_χ über M , das uns in Kapitel 6 auf Seite 71 wieder begegnen wird. Schließlich zeigt 2.1.9, daß

$$\begin{aligned}
E_\chi &= E \times_\chi \mathbb{C} \\
&= (\pi^* E') \times_\chi \mathbb{C} \\
&= (X \times_\pi E') \times_\chi \mathbb{C} \\
&\simeq E' \otimes (X \times_\chi \mathbb{C}) \\
&= E' \otimes F_\chi.
\end{aligned}$$

Hier sind alle Gleichheiten unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen, bis auf die vorletzte, die man wie folgt sieht:

$$(X \times_\pi E') \times_\chi \mathbb{C} = (X \times_\pi E' \times \mathbb{C}) / \Gamma$$

mit der Γ -Aktion

$$\gamma(x, e, z) = (\gamma x, e, \chi(\gamma)z),$$

wogegen

$$E' \otimes (X \times_\chi \mathbb{C}) = E' \otimes ((X \times \mathbb{C}) / \Gamma)$$

mit der Γ -Aktion

$$\gamma(x, z) = (\gamma x, \chi(\gamma)z).$$

Beide Bündel sind also Quotienten isomorpher Bündel bezüglich der gleichen Γ -Aktion.

2.1.6

Unser nächstes Ziel ist die Zerlegung des Raumes $L^2(E)$ der quadratintegriblen Schnitte auf E in ein direktes Integral über $\hat{\Gamma}$. Dabei verwenden wir auf $\hat{\Gamma}$ das Haarmaß. Aus der Theorie der Darstellungen lokal kompakter Gruppen brauchen wir die folgenden Charakterrelationen für abelsches, diskretes Γ , also für abelsches, kompaktes $\hat{\Gamma}$ (siehe z. B. Rudin, 1962, §1.5):

2.1.7 Lemma (Charakterrelationen)

Für $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$\int_{\hat{\Gamma}} \chi(\gamma) d\chi = \begin{cases} 1, & \gamma = e, \\ 0, & \gamma \neq e. \end{cases} \quad (2.1 \cdot 10)$$

Für $\chi, \chi' \in \hat{\Gamma}$, gilt

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \bar{\chi}(\gamma) \chi'(\gamma) = \delta(\chi - \chi') \quad (2.1 \cdot 11)$$

im Distributionssinn, d. h. für $f \in C(\hat{\Gamma})$ gilt

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\hat{\Gamma}} \bar{\chi}(\gamma) \chi'(\gamma) f(\chi) d\chi = f(\chi').$$

Aus (Dixmier, 1957, Kapitel II, §1) übernehmen die nötigen Begriffe für die direkten Integrale:

2.1.8 Definition (meßbares Feld von Hilberträumen)

(B, μ) sei ein Maßraum, $M(B, \mu)$ seien die μ -meßbaren komplexwertigen Funktionen auf B . $(E(z))_{z \in B}$ sei eine Familie von Hilberträumen. Der Vektorraum $\Pi := \prod_{z \in B} E(z)$ heißt **Raum aller Vektorfelder**. Eine **Meßbarkeitsstruktur** auf \mathcal{E} ist definiert durch einen Unterraum $\Lambda \subset \Pi$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\forall_{s \in \Lambda} (z \mapsto \|s(z)\|_{E(z)}) \in M(B, \mu)$
2. $\langle t \in \Pi \wedge \forall_{s \in \Lambda} (z \mapsto \langle s(z) | t(z) \rangle_{E(z)}) \in M(B, \mu) \rangle \Rightarrow t \in \Lambda$
3. $\exists_{(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda} \forall_{z \in B} (s_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \subset E_z$ total

$\mathcal{E} = ((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$ heißt dann **meßbares Feld von Hilberträumen**. Das Skalarprodukt ist automatisch meßbar (Polarisation), und Λ ist ein Unter- $M(B, \mu)$ -Modul von Π .

2.1.9 Lemma (definierende Schnitte)

Sei Π wie oben und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Pi$ mit

1. $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} (z \mapsto \langle s_n | s_m \rangle_{E(z)}) \in M(B, \mu)$ und
2. $\forall_{z \in B} (s_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \subset E_z$ total.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Meßbarkeitstruktur $\Lambda \subset \Pi$ mit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Lambda$.

2.1.10 Definition (direktes Integral)

Sei $((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$ ein meßbares Feld von Hilberträumen über dem Maßraum (B, μ) . Der Vektorraum der quadratintegrierbaren Schnitte (das **direkte Integral**) von $((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$ ist definiert durch

$$\int_B^\oplus E(z) d\mu(z) := \{s \in \Lambda \mid (z \mapsto \|s(z)\|_{E(z)}) \in L^2(B, d\mu)\}. \quad (2.1.12)$$

Durch das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \left(\int_B^\oplus E(z) d\mu(z) \right) \times \left(\int_B^\oplus E(z) d\mu(z) \right) &\ni (s, t) \mapsto \langle s | t \rangle_{\int_B^\oplus E} \in \mathbb{C}, \\ \langle s | t \rangle_{\int_B^\oplus E} &:= \int_B \langle s(z) | t(z) \rangle_{E(z)} d\mu(z) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

wird $\int_B^\oplus E(z) d\mu$ zu einem Hilbertraum.

2.1.11 Definition und Hilfssatz (Operatoren auf Feldern von Hilberträumen)

Eine Familie von beschränkten Operatoren $(T(z))_{z \in B} \subset \prod_{z \in B} \mathcal{L}(E(z))$ heißt **meßbares Feld von Operatoren** auf $((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$, falls $T(\Lambda) \subset \Lambda$ ist; es heißt **wesentlich beschränkt**, falls $(z \mapsto \|T(z)\|_{\mathcal{L}(E(z))})$ wesentlich beschränkt ist. Es gilt dann

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\int_B^\oplus E)} = \operatorname{ess\,sup}_{z \in B} \|T(z)\|_{\mathcal{L}(E(z))}. \quad (2.1.14)$$

Umgekehrt heißt ein beschränkter Operator $S \in \mathcal{L}(\int_B^\oplus E)$ **zerlegbar**, falls es ein wesentlich beschränktes Feld von beschränkten Operatoren $(T(z))_{z \in B}$ gibt mit $T = S$. Wir bezeichnen die Gesamtheit der zerlegbaren Operatoren mit $L^\infty(B, \mathcal{L}(E))$. Sie sind gerade gegeben durch

$$L^\infty(B, \mathcal{L}(E)) = \left(L^\infty(B, \mathbb{C}) \right)'. \quad (2.1.15)$$

2.1.12 Lemma (direktes Integral und Spektrum)

Sei $(T(z))_{z \in B}$ ein wesentlich beschränktes Feld von beschränkten selbstadjungierten Operatoren. Dann gilt:

1. T ist selbstadjungiert.

2. Für jede beschränkte Borelfunktion F auf \mathbb{R} gilt $F(T) = \int_B^\oplus F(T(z)) d\mu(z)$.

3. $\lambda \in \text{spec}(T) \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \mu(\{z \in B \mid (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \text{spec } T(z) \neq \emptyset\}) > 0$

4. $\lambda \in \text{spec}_p(T) \Leftrightarrow \mu(\{z \in B \mid \lambda \in \text{spec}_p T(z)\}) > 0$

Für unbeschränkte Operatoren übertragen sich die Begriffe entsprechend, wenn man sie auf die beschränkte Resolvente anwendet.

In unserer geometrischen Situation nehmen wir als Basis den Charakterraum $\hat{\Gamma}$ zusammen mit dem Haarmaß. Ein Feld von Hilberträumen haben wir gegeben durch die Hilberträume $L^2(E_\chi)$ der quadratintegrablen Schnitte in die Vektorraumbündel E_χ über M .

Wir definieren für $\chi \in \hat{\Gamma}$ eine Abbildung $\Phi_\chi : C_c^\infty(E) \ni s \mapsto \tilde{s}_\chi \in C^\infty(E)$ durch

$$\tilde{s}_\chi(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma) \gamma_* s(\gamma^{-1}x). \quad (2.1 \cdot 16)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\chi(\gamma'x) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma) \gamma_* s(\gamma^{-1}\gamma'x) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma'\gamma'^{-1}\gamma) (\gamma'\gamma'^{-1}\gamma)_* s((\gamma'^{-1}\gamma)^{-1}x) \\ &= \chi(\gamma') \gamma'_* \tilde{s}_\chi(x) \end{aligned}$$

ist $\tilde{s}_\chi \in C^\infty(E)^{\Gamma, \chi}$ und definiert damit einen Schnitt $s_\chi \in C^\infty(E_\chi)$. Ist \mathcal{D} ein Fundamentalbereich für die Γ -Aktion, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\Gamma}} \|s_\chi\|_{L^2(E_\chi)}^2 d\chi &= \int_{\hat{\Gamma}} \int_{\mathcal{D}} |\tilde{s}_\chi(x)|^2 dx d\chi \\ &= \int_{\mathcal{D}} \int_{\hat{\Gamma}} \sum_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma} \chi(\gamma_1^{-1}\gamma_2) \langle \gamma_{1*} s(\gamma_1^{-1}x) \mid \gamma_{2*} s(\gamma_2^{-1}x) \rangle_E d\chi dx \\ &= \int_{\mathcal{D}} \sum_{\gamma \in \Gamma} |s(\gamma^{-1}x)|^2 dx \\ &= \|s\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt zum einen, daß wir eine meßbare Struktur auf $\prod_{\chi \in \hat{\Gamma}} L^2(E_\chi)$ definieren können, indem wir in $C_c^\infty(E)$ eine in $L^2(E)$ totale Folge wählen und Lemma 2.1.9 anwenden. Zum anderen sehen wir, daß das entsprechende direkte Integral $\int_{\hat{\Gamma}}^\oplus L^2(E_\chi) d\chi$ isomorph zu $L^2(E)$ ist und Φ eine Isometrie zwischen $L^2(E)$ und $\int_{\hat{\Gamma}}^\oplus L^2(E_\chi) d\chi$ wird. Die Abbildung

$$\Phi^* : (s_\chi)_{\chi \in \hat{\Gamma}} \mapsto \int_{\hat{\Gamma}} \tilde{s}_\chi(x) d\chi$$

ist invers zu Φ , wie man anhand der Charakterrelationen (2.1·10) und (2.1·11) leicht nachprüft.

Dies beweist folgendes

2.1.13 Lemma (direktes Integral)

Die durch (2.1.16) definierte Abbildung läßt sich stetig fortsetzen zu einer unitären Abbildung

$$\Phi : L^2(E) \rightarrow \int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} L^2(E_{\chi}) d\chi. \quad (2.1.17)$$

Für das direkte Integral $H = \int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} H_{\chi} d\chi$ von Hilberträumen ist die Menge der zerlegbaren beschränkten Operatoren $L^{\infty}(\hat{\Gamma}, \mathcal{L}(H))$ nach 2.1.11 der Kommutant $(L^{\infty}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}))'$ in $\mathcal{L}(H)$. Da Kommutanten schwach abgeschlossen sind und $C(\hat{\Gamma}, \mathbb{C})$ in $L^{\infty}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C})$ schwach dicht ist, gilt folglich $(L^{\infty}(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}))' = (C(\hat{\Gamma}, \mathbb{C}))'$. Um die zerlegbaren Operatoren in unserem Fall zu bestimmen, benötigen wir noch die Aktion von $C(\hat{\Gamma})$ auf $L^2(E)$:

2.1.14 Hilfssatz ($C(\hat{\Gamma})$ -Aktion)

$f \in C(\hat{\Gamma})$ operiert auf $s \in C_c^{\infty}(E)$ via

$$M_f s := \Phi^* f \Phi s, \quad (2.1.18)$$

und es gilt

$$(M_f s)(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma^{-1}) T_{\gamma} s(x), \text{ wobei} \quad (2.1.19)$$

$$\hat{f}(\gamma) := \int_{\hat{\Gamma}} f(\chi) \bar{\chi}(\gamma) d\chi \quad (2.1.20)$$

die Fouriertransformierte von f ist. M_f ist ein beschränkter Operator mit Norm $\|f\|_{\infty}$.

Beweis Für $x \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} (M_f s)(x) &= (\Phi^* f \Phi s)(x) \\ &= \int_{\hat{\Gamma}} (f \Phi s)_{\chi}(x) d\chi \\ &= \int_{\hat{\Gamma}} f(\chi) \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma) \gamma_* s(\gamma^{-1} x) d\chi \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma^{-1}) \gamma_* s(\gamma^{-1} x) \end{aligned}$$

Da f in jeder Faser ein Multiplikationsoperator ist, hat f faserweise Norm $\|f\|_{\infty}$, also auch f selbst und $M_f = \Phi^* f \Phi$. 2.1.14

2.1.15 Korollar (Charakterisierung zerlegbarer Operatoren)

Die Konjugation mit Φ definiert einen Isomorphismus zwischen den beschränkten Operatoren auf $\int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} L^2(E_{\chi}) d\chi$ und den Γ -periodischen beschränkten Operatoren auf $L^2(E)$.

Beweis

„ \Rightarrow “ Ein zerlegbarer Operator vertauscht mit der $C(\hat{\Gamma})$ -Aktion, insbesondere mit $f_\gamma \in C(\hat{\Gamma})$ definiert durch

$$\hat{f}_\gamma(\gamma') := \begin{cases} 1, & \text{wenn } \gamma = \gamma', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vertauschen mit f_γ heißt nach (2.1·19) gerade vertauschen mit γ .

„ \Leftarrow “ Vertauschen mit der Γ -Aktion heißt vertauschen mit allen f_γ für $\gamma \in \Gamma$. Wegen

$$f_\gamma(\chi) = \chi(\gamma)$$

sind die f_γ gerade die Charaktere $\hat{\Gamma}$ der kompakten Gruppe $\hat{\Gamma}$ und nach dem Peter-Weyl-Theorem (oder direkter: nach dem Stone-Weierstraß-Theorem) dicht in $C(\hat{\Gamma})$. Da die Operatornorm von M_f und die Supremumsnorm von f übereinstimmen, folgt die Vertauschungsrelation für alle $f \in C(\hat{\Gamma})$ durch Stetigkeit. 2.1.15

Per definitionem ist ein unbeschränkter Operator zerlegbar genau dann, wenn seine (beschränkte) Resolvente zerlegbar ist. Für einen periodischen symmetrischen elliptischen Operator D haben wir einen Definitionsbereich $\mathcal{D}(D) = C_c^\infty(X)$, der sowohl unter D selbst als auch unter der Γ -Aktion invariant ist und auf dem $[D, \gamma] = 0$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt. Daher vertauschen alle beschränkten Funktionen von D mit der Γ -Aktion, und es gilt:

2.1.16 Theorem (Zerlegung eines periodischen Operators)

Der Abschluß \bar{D} jedes periodischen symmetrischen elliptischen Operators D ist zerlegbar bezüglich des direkten Integrals $\int_{\Gamma}^{\oplus} L^2(E_\chi) d\chi$. Ein determinierender Definitionsbereich für \bar{D}_χ ist gegeben durch $C^\infty(E_\chi)$, und die Operation von D_χ auf $C^\infty(E_\chi) \simeq C^\infty(E)^{\Gamma, \chi}$ ist gerade die Wirkung von D als Differentialoperator auf $C^\infty(E)^{\Gamma, \chi}$. Es gilt $\bar{D}_\chi = \overline{D_\chi}$, wobei $D_\chi := D|_{C^\infty(E)^{\Gamma, \chi}}$ ist und die Abschlüsse als Operatoren in $L^2(E_\chi)$ zu nehmen sind.

Beweis Nach der Vorbemerkung ist die Zerlegbarkeit schon gezeigt. $C_c^\infty(X)$ ist ein determinierender Bereich für \bar{D} , das Bild unter Φ_χ liegt in $C^\infty(E)^{\Gamma, \chi}$ und ist determinierend für \bar{D}_χ , da Φ eine Isometrie ist. Auf diesem Bereich ist wegen (2.1·16) die Wirkung von \bar{D}_χ wie behauptet. Da D_χ als symmetrischer elliptischer Operator auf der kompakten Mannigfaltigkeit M wesentlich selbstadjungiert und \bar{D}_χ als Faser von \bar{D} selbstadjungiert³ ist, definieren beide die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von $\overline{D_\chi}$ von D_χ . 2.1.16

2.1.17 Bemerkung (Spektraltheorie)

Für die Spektraltheorie in der üblichen Blochtheorie gibt es zwei wesentlichen Ingredienzen: Zum einen sind da die allgemeinen Resultate über das Spektrum eines Operators, der

³Wir zeigen in 4.2.2 auf Seite 49, daß ein periodischer symmetrischer elliptischer Operator wesentlich selbstadjungiert ist.

bezüglich eines direkten Integrals zerlegbar ist (siehe Lemma 2.1.12 auf Seite 17). Diese benutzen nur die Meßbarkeit der Familie $(D_\chi)_{\chi \in \hat{\Gamma}}$, d. h. nur die $L^\infty(\hat{\Gamma})$ -Modulstruktur des direkten Integrals als meßbares Feld von Hilberträumen.

Zum anderen erlaubt erst die stetige Abhängigkeit von χ , auf Bandstruktur im Spektrum zu schließen: Die Fasern eines periodischen symmetrischen elliptischen Operators D sind nach 2.1.16 elliptische symmetrische Operatoren auf Schnitten in Vektorraumbündel über kompakten Mannigfaltigkeiten und haben daher diskretes Spektrum. Da die Operatorfamilie stetig in χ ist, hängen auch die Eigenwerte stetig von χ ab, so daß \bar{D} nach 2.1.12 Bandstruktur hat. Wir werden dieses Resultat in 3.2.3 auf Seite 33 im Rahmen der nichtkommutativen Blochtheorie beweisen.

Im nächsten Abschnitt werden wir die beschriebene stetige Abhängigkeit begrifflich in Form eines stetigen Feldes von Hilberträumen fassen.

2.2 Nichtkommutative Form der kommutativen Blochtheorie

Nach dem bekannten Gelfandschen Darstellungssatz ist jede kommutative C^* -Algebra \mathcal{A} isomorph zu $C_\infty(X)$, den stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf dem topologischen Hausdorffraum X , wobei X gerade das Spektrum $\widehat{\mathcal{A}}$ von \mathcal{A} ist, also die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler unitärer Darstellungen (siehe z. B. Murphy, 1990); als C^* -Norm dient die Supremumsnorm, als Involution die punktweise komplexe Konjugation. Hilbert- \mathcal{A} -Moduln sind gerade gegeben durch die Schnitte $C_\infty(\mathcal{H})$ in ein stetiges Feld von Hilberträumen über X , endlich erzeugte projektive \mathcal{A} -Moduln sind gerade die Schnitte $C_\infty(E)$ in ein Vektorbündel E über X (Swan, 1962). In diesem Abschnitt wollen wir die entsprechenden Strukturen im Fall der periodischen elliptischen Operatoren beschreiben und damit eine Formulierung der Blochtheorie finden, die sich von den Punkten des Raumes $\hat{\Gamma}$ löst und nur noch die algebraischen Strukturen bezüglich $C(\hat{\Gamma})$ benutzt.

Wir haben in 2.1.14 auf Seite 19 schon die Aktion von $C(\hat{\Gamma})$ auf $L^2(E)$ bestimmt. Wir definieren nun unter Verwendung des faserweisen Skalarprodukts des direkten Integrals ein $C(\hat{\Gamma})$ -wertiges Skalarprodukt:

2.2.1 Definition und Hilfssatz (Prä-Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Modul)

Für $s_1, s_2 \in C_c^\infty(E)$ wird durch

$$\langle s_1 | s_2 \rangle(\chi) := \langle (\Phi s_1)_\chi | (\Phi s_2)_\chi \rangle_{L^2(E_\chi)} \quad (2.2.1)$$

ein $C(\hat{\Gamma})$ -wertiges Skalarprodukt definiert, das $C_c(E)$ zu einem Prä-Hilbert- C^* -Modul über $C(\hat{\Gamma})$ macht, der ein Untermodul des $C(\hat{\Gamma})$ -Moduls $L^2(E)$ ist.

Beweis Zunächst ist $C_c(E)$ offensichtlich ein $C(\hat{\Gamma})$ -Untermodul von $L^2(E)$. Weiterhin ist

das Skalarprodukt nach Definition

$$\begin{aligned}
\langle s_1 | s_2 \rangle(\chi) &= \langle (\Phi s_1)_\chi | (\Phi s_2)_\chi \rangle_{L^2(E_\chi)} \\
&= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \bar{\chi}(\gamma) \chi(\gamma') \int_{\mathcal{D}} \langle \gamma_* s_1(\gamma^{-1}x) | \gamma'_* s_2(\gamma'^{-1}x) \rangle_{E_x} dx \\
&= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \chi(\gamma^{-1}\gamma') \int_{\gamma^{-1}\mathcal{D}} \langle s_1(y) | \gamma_*^{-1} \gamma'_* s_2(\gamma'^{-1}\gamma y) \rangle_{E_y} dy \\
&= \sum_{\gamma, \gamma'' \in \Gamma} \chi(\gamma'') \int_{\gamma^{-1}\mathcal{D}} \langle s_1(y) | \gamma''_* s_2(\gamma''^{-1}y) \rangle_{E_y} dy \\
&= \sum_{\gamma'' \in \Gamma} \chi(\gamma'') \int_X \langle s_1(y) | \gamma''_* s_2(\gamma''^{-1}y) \rangle_{E_y} dy \\
&= \sum_{\gamma'' \in \Gamma} \chi(\gamma'') \langle s_1 | T_{\gamma''} s_2 \rangle_{L^2(E)}
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

und daher stetig in χ , da die letzte Summe in (2.2.2) endlich ist. Die *-Eigenschaft ist unmittelbar gegeben, die $C(\hat{\Gamma})$ -Linearität des Skalarprodukts folgt wegen

$$\begin{aligned}
\langle s_1 | M_f s_2 \rangle(\chi) &= \langle (\Phi s_1)_\chi | (\Phi \Phi^* f \Phi s_2)_\chi \rangle_{L^2(E_\chi)} \\
&= \langle (\Phi s_1)_\chi | (f \Phi s_2)_\chi \rangle_{L^2(E_\chi)} \\
&= \langle (\Phi s_1)_\chi | f(\chi) (\Phi s_2)_\chi \rangle_{L^2(E_\chi)} \\
&= \langle (\Phi s_1)_\chi | (\Phi s_2)_\chi \rangle_{L^2(E_\chi)} f(\chi) \\
&= \langle s_1 | M_f s_2 \rangle(\chi) f(\chi).
\end{aligned}$$

2.2.1

(2.2.2) ist die Fouriertransformierte der Abbildung $\gamma \mapsto \langle s_1 | T_\gamma s_2 \rangle$ und wird den richtigen Weg weisen für die Konstruktion eines geeigneten Hilbert- C^* -Moduls im nichtkommutativen Fall (siehe 4.3.1 auf Seite 52).

Wie im Anhang A auf Seite 83 für den Fall beliebiger C^* -Algebren \mathcal{A} beschrieben, definiert ein C^* -wertiges Skalarprodukt auf einem \mathcal{A} -Modul zusammen mit der C^* -Norm von \mathcal{A} eine Banachnorm auf dem \mathcal{A} -Modul. Die C^* -Norm auf $C(\hat{\Gamma})$ ist die Supremumsnorm, so daß wir in diesem Fall eine Banachnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{E}'}$ auf $\mathcal{E}' := C_c(E) \ni s$ gegeben haben durch

$$\|s\|_{\mathcal{E}'} := \sup_{\chi \in \hat{\Gamma}} \langle s | s \rangle(\chi).$$

Bezüglich dieser Norm können wir \mathcal{E}' abschließen und dadurch zu einem Hilbert- C^* -Modul über $\hat{\Gamma}$ machen:

2.2.2 Definition und Hilfssatz (Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Modul und GNS-Darstellung)

Der Abschluß von $C_c(E)$ als Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Modul sei mit \mathcal{E} bezeichnet. \mathcal{E} ist ein Untermodul des $C(\hat{\Gamma})$ -Moduls $L^2(E)$. Das Haarmaß auf $\hat{\Gamma}$ definiert eine treue Spur τ auf $C(\hat{\Gamma})$, und

die zugehörige GNS-Darstellung π_τ (siehe Abschnitt A.2 auf Seite 86) von \mathcal{E} ist gerade die ursprüngliche $C(\hat{\Gamma})$ -Aktion auf $L^2(E)$.

Beweis Wegen

$$\|\langle s_1 | s_2 \rangle_{\mathcal{E}}\|_{L^\infty(\hat{\Gamma})} \geq \|\langle s_1 | s_2 \rangle_{\mathcal{E}}\|_{L^1(\hat{\Gamma})} \geq |\langle s_1 | s_2 \rangle_{L^2(E)}|$$

wird der Abschluß von $C_c(E)$ in der \mathcal{E} -Norm ein Unterraum von $L^2(E)$, der nach Definition ein $C(\hat{\Gamma})$ -Modul ist.

Das Integral bezüglich eines Maßes definiert bekanntlich eine Spur. Da $\hat{\Gamma}$ kompakt ist und damit bezüglich des Haarmaßes endliches Volumen hat, ist die Spur in diesem Fall endlich, und alle $f \in C(\hat{\Gamma}) \subset L^1(\hat{\Gamma})$ sind Spurklasse. Da $\hat{\Gamma}$ keine offenen Haar-Nullmengen hat, ist die Spur treu. Das durch τ definierte Skalarprodukt berechnet sich für $s_1, s_2 \in \mathcal{E}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \langle s_1 | s_2 \rangle_\tau &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \langle s_1 | s_2 \rangle_{\mathcal{E}} \\ &\stackrel{(2.2 \cdot 2)}{=} \int_{\hat{\Gamma}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma) \langle s_1 | T_\gamma s_2 \rangle_{L^2(E)} d\chi \\ &\stackrel{(2.1 \cdot 10)}{=} \langle s_1 | s_2 \rangle_{L^2(E)} \end{aligned}$$

Da $\mathcal{E} \supset C_c(E)$ dicht in $L^2(E)$ bezüglich der L^2 -Norm und damit bezüglich der von τ erzeugten Norm ist, ist der GNS-Darstellungsraum zu τ gerade $L^2(E)$. Damit folgt auch unmittelbar die Übereinstimmung der Modulstrukturen. 2.2.2

2.2.3 Hilfssatz (stetiges Feld von Hilberträumen über $\hat{\Gamma}$)

Das zu \mathcal{E} nach C.1.4 auf Seite 103 gehörige stetige Feld von Hilberträumen über $\hat{\Gamma}$ hat Faser $L^2(E_\chi)$ über χ , die Stetigkeitsstruktur ist durch \mathcal{E} definiert.

Beweis Die Faser im Punkt χ erhalten wir als GNS-Darstellungsraum zum Zustand $\pi_\chi : C(\hat{\Gamma}) \ni f \mapsto f(\chi)$. Für die Stetigkeitsstruktur siehe C.1.4. □

Somit haben wir die Zerlegung von $L^2(E)$ in ein direktes Integral über dem Raum $\hat{\Gamma}$ ersetzt durch die Struktur eines Hilbert- C^* -Moduls über der C^* -Algebra $C(\hat{\Gamma})$, versehen mit einer treuen Spur, deren GNS-Darstellung den ursprünglichen Hilbertraum zurückliefert. In 2.1.14 auf Seite 19 hatten wir die $C(\hat{\Gamma})$ -Aktion bestimmt und bemerkt, daß die zerlegbaren beschränkten Operatoren bezüglich des direkten Integrals gerade die mit dieser Aktion vertauschenden sind. Zerlegbare Operatoren sind also genau die Modulabbildungen des $C(\hat{\Gamma})$ -Moduls $L^2(E)$. Insbesondere gehören dazu die Bilder unter der GNS-Darstellung von Modulabbildungen auf \mathcal{E} . Wir zitieren nun zum Abschluß dieses Kapitels einen Spezialfall von Satz 4.3.5 auf Seite 54, der zeigt, daß periodische elliptische Operatoren tatsächlich reguläre unbeschränkte Modulabbildungen (siehe z.B. Lance, 1995, Kap. 9 für diese Begriffe) auf \mathcal{E} definieren, daß also die Resolvente eines solchen Operators im Bild der GNS-Darstellung liegt.

2.2.4 Theorem (Zerlegung eines periodischen Operators)

Sei D ein periodischer elliptischer Operator. Dann definiert D einen regulären Operator $D_{\mathcal{E}}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(D_{\mathcal{E}}) = C_c^\infty(E)$ in \mathcal{E} . Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\pi_\tau((\lambda \mathbb{1}_{\mathcal{E}} + \overline{D_{\mathcal{E}}})^{-1}) = (\lambda \mathbb{1}_{L^2(E)} + \bar{D})^{-1}. \quad (2.2.3)$$

Kapitel 3

Nichtkommutative Blochtheorie

In diesem Kapitel formulieren wir, inspiriert von der nichtkommutativen Form der kommutativen Blochtheorie (2.2), eine allgemeine Klasse von Operatoren, in deren Rahmen eine „abstrakte Blochtheorie“ spektrale Eigenschaften aus Eigenschaften der beteiligten C^* -Algebren ablesen wird. Abschließend schildern wir verschiedene Beispiele dieser Klasse.

3.1	Definition	26
3.1.1	Definition: \mathcal{A} -elliptischer Operator	26
3.1.2	Bemerkung: Modul- und Hilbertraumoperatoren	26
3.1.3	Lemma: Spektrum von Modul- und Hilbertraumoperatoren	27
3.1.4	Definition und Hilfssatz: \mathcal{A} -Spur und assoziierte Spur	27
3.1.5	Bemerkung: $\mathrm{tr} \pi_{x,y}^{H_\tau}$ versus $\mathrm{tr}_\tau \pi_{x,y}^\mathcal{E}$	28
3.1.6	Bemerkung: $\mathrm{tr} \pi_{x,y}^\mathcal{E}$ versus $\mathrm{tr}_\tau \pi_{x,y}^\mathcal{E}$	28
3.1.7	Bemerkung: tr_τ für Standardhilbertmoduln	30
3.1.8	Lemma: tr für tr_τ -Spurklasse	30
3.1.9	Lemma: Nichtexistenz endlichdimensionaler Moduln	30
3.2	Spektraltheorie	31
3.2.1	Lemma: Spektralprojektionen	31
3.2.2	Theorem: isolierte Eigenwerte	33
3.2.3	Theorem: Bandstruktur	33
3.2.4	Theorem: Cantorspektrum	34
3.2.5	Definition und Hilfssatz: reeller Rang	36
3.2.6	Bemerkung: Kadisoneigenschaft und $RR I_0$	39
3.2.7	Bemerkung: reeller Rang und Dimension	39

3.2.8	Theorem: Cantorspektrum	39
3.3	Beispiele	40
3.3.1	Beispiel: verallgemeinerte Harperoperatoren	40
3.3.2	Beispiel: eichperiodische elliptische Operatoren	41
3.3.3	Beispiel: elliptische Operatoren auf Hilbertmodulbündeln	41
3.3.4	Beispiel: abstrakte elliptische Operatoren	41

3.1 Definition

3.1.1 Definition (\mathcal{A} -elliptischer Operator)

\mathcal{A} sei eine unitale C^* -Algebra, \mathcal{E} ein Hilbert- C^* -Modul über \mathcal{A} . Ein unbeschränkter Operator D auf \mathcal{E} heißt **\mathcal{A} -elliptisch**, falls D

1. *dicht definiert ist,*
 2. *regulär ist in dem Sinne, daß D einen dicht definierten Adjungierten D^* hat mit $\text{ran}(1 + D^*D) \stackrel{\text{dicht}}{\subset} \mathcal{E}$,*
- und
3. *\mathcal{A} -kompakte Resolvente¹ hat, d. h. $(1 + D^*D)^{-1} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.*

Hilbertmoduln sind bei uns wie üblich und wie in Anhang A definiert Hilbertrechtsmoduln. Hilberträume sind Hilbert- \mathbb{C} -Moduln, daher sind unsere Hilbertraum-Skalarprodukte komplex linear im rechten Eintrag und komplex antilinear im linken Eintrag, was der Konvention in der mathematischen Physik entspricht.

3.1.2 Bemerkung (Modul- und Hilbertraumoperatoren)

Weiterhin gebe es eine (gegebenenfalls normierte, d. h. $\tau(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) = 1$) treue Spur τ auf \mathcal{A} . Wie im Anhang A.2 auf Seite 86 beschrieben, definiert dies ein Hilbertraumskalarprodukt auf \mathcal{E} durch

$$\langle e_1 | e_2 \rangle_{\tau} := \tau(\langle e_1 | e_2 \rangle_{\mathcal{E}})$$

für $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$. H_{τ} sei die Vervollständigung von \mathcal{E} bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\tau}$, d. h. der zugehörige GNS-Darstellungsraum. Wir schreiben dann auch $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H_{\tau}}$ für $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\tau}$. $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ wird treu dargestellt auf H_{τ} . Damit ist das Spektrum eines Elementes a der C^* -Algebra $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ als Menge gleich dem Spektrum des Operators $\pi_{\tau}(a)$ auf dem Hilbertraum H_{τ} :

¹ Die Bezeichnung wird im Beweis von 3.2.1 auf Seite 31 genauer begründet.

3.1.3 Lemma (Spektrum von Modul- und Hilbertraumoperatoren)

Ist $a \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, so ist

$$\operatorname{spec} a = \operatorname{spec} \pi_{\tau}(a).$$

Im folgenden identifizieren wir \mathcal{E} bzw. $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ mit den jeweiligen Bildern in H_{τ} bzw. $\mathcal{L}(H_{\tau})$.

3.1.4 Definition und Hilfssatz (\mathcal{A} -Spur und assoziierte Spur)

Auf den \mathcal{A} -endlichen Operatoren² $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ definieren wir eine \mathcal{A} -wertige Spur durch

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(\pi_{x,y}^{\mathcal{E}}) = \langle y|x \rangle_{\mathcal{E}}. \quad (3.1.1)$$

Unter einer **\mathcal{A} -wertigen Spur** verstehen wir eine \mathbb{C} -lineare Abbildung

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{E}} : \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{A}$$

mit

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(T^*) = (\operatorname{tr}_{\mathcal{E}} T)^* \quad (3.1.2)$$

und

$$\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(ST) = \operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(TS) \quad (3.1.3)$$

für $S, T \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. $\operatorname{tr}_{\mathcal{E}}$ ist *treu* in dem Sinne, daß

$$\left\langle \forall S \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \operatorname{tr}_{\mathcal{E}}(ST) = 0 \right\rangle \Rightarrow T = 0. \quad (3.1.4)$$

Schließlich definiert

$$\operatorname{tr}_{\tau} = \tau \circ \operatorname{tr}_{\mathcal{E}} \quad (3.1.5)$$

eine treue Spur auf $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, die zu τ in der GNS-Darstellung **assoziierte Spur**. Das entsprechende Spurklasseideal in $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \operatorname{tr}_{\tau})$ (**tr_{τ} -Spurklasse**).

Beweis Für die Erzeugenden von $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ gelten die leicht zu überprüfenden Relationen

$$\begin{aligned} (\pi_{x,y}^{\mathcal{E}})^* &= \pi_{y,x}^{\mathcal{E}}, & \pi_{xa,y}^{\mathcal{E}} &= \pi_{x,ya^*}^{\mathcal{E}}, \\ T\pi_{x,y}^{\mathcal{E}} &= \pi_{Tx,y}^{\mathcal{E}}, & \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}T &= \pi_{x,T^*y}^{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

² Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) &= \operatorname{span}\{\pi_{x,y}^{\mathcal{E}} \mid x, y \in \mathcal{E}\} \text{ mit} \\ \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}(z) &= x\langle y|z \rangle_{\mathcal{E}} \text{ für } z \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

so daß $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \overline{\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})}$.

für $x, y \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}, T \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. Daher haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathcal{E}}((\pi_{x,y}^{\mathcal{E}})^*) &= \langle x|y \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= (\mathrm{tr}_{\mathcal{E}} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}})^*, \\ \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(T \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}) &= \langle y|Tx \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle T^*y|x \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(\pi_{x,y}^{\mathcal{E}} T).\end{aligned}$$

Da für alle $z, t \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(\pi_{x,y}^{\mathcal{E}} \pi_{z,t}^{\mathcal{E}}) &= \mathrm{tr}_{\mathcal{E}}(\pi_{x\langle y|z \rangle_{\mathcal{E}}, t}^{\mathcal{E}}) \\ &= \langle t|x \langle y|z \rangle_{\mathcal{E}} \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle t|\pi_{x,y}^{\mathcal{E}}(z) \rangle_{\mathcal{E}}\end{aligned}$$

gilt, ist $\mathrm{tr}_{\mathcal{E}}$ treu: Setze dazu $t = \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}(z)$.

Schließlich ist tr_{τ} offensichtlich eine treue Spur, da τ eine treue Spur auf \mathcal{A} und $\mathrm{tr}_{\mathcal{E}}$ eine treue \mathcal{A} -Spur ist. 3.1.4

3.1.5 Bemerkung ($\mathrm{tr} \pi_{x,y}^{H_{\tau}}$ versus $\mathrm{tr}_{\tau} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}$)

Nach 3.1.4 ist

$$\mathrm{tr}_{\tau} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}} = \tau(\langle y|x \rangle_{\mathcal{E}}) = \langle y|x \rangle_{H_{\tau}} = \mathrm{tr} \pi_{x,y}^{H_{\tau}}$$

mit der gewöhnlichen kanonischen Hilbertraumspur tr und den üblichen Operatoren

$$\pi_{x,y}^{H_{\tau}} : H_{\tau} \ni z \mapsto x \langle y|z \rangle_{H_{\tau}} \in H_{\tau}$$

vom Rang 1 auf dem Hilbertraum H_{τ} . Allerdings sind $\pi_{x,y}^{\mathcal{E}}$ und $\pi_{x,y}^{H_{\tau}}$ verschiedene Operatoren:

$$\pi_{x,y}^{\mathcal{E}}(z) = x \langle y|z \rangle_{\mathcal{E}},$$

wogegen

$$\begin{aligned}\pi_{x,y}^{H_{\tau}}(z) &= x \langle y|z \rangle_{H_{\tau}} \\ &= x \tau(\langle y|z \rangle_{\mathcal{E}}).\end{aligned}$$

Daher sind tr_{τ} und tr im allgemeinen tatsächlich verschiedene Spuren.

3.1.6 Bemerkung ($\mathrm{tr} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}$ versus $\mathrm{tr}_{\tau} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}$)

Sei $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis³ von H_{τ} . Dann ist

$$\mathrm{tr}_{\tau} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}} = \mathrm{tr} \pi_{x,y}^{H_{\tau}}$$

³Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß $e_n \in \mathcal{E}$ gewählt wurde für alle $n \in \mathbb{N}$. Da \mathcal{E} nach Definition dicht in H_{τ} ist, kann dies immer erreicht werden.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | \pi_{x,y}^{H_\tau}(e_n) \rangle_{H_\tau} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \langle y | e_n \rangle_{H_\tau} \rangle_{H_\tau} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \rangle_{H_\tau} \langle y | e_n \rangle_{H_\tau} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(\langle e_n | x \rangle_{\mathcal{E}}) \tau(\langle y | e_n \rangle_{\mathcal{E}}), \\
\mathrm{tr} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}(e_n) \rangle_{H_\tau} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \langle y | e_n \rangle_{\mathcal{E}} \rangle_{H_\tau} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(\langle e_n | x \langle y | e_n \rangle_{\mathcal{E}} \rangle_{\mathcal{E}}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(\langle e_n | x \rangle_{\mathcal{E}} \langle y | e_n \rangle_{\mathcal{E}}).
\end{aligned}$$

Also fallen $\mathrm{tr} \pi_{x,y}^{H_\tau}$ und $\mathrm{tr} \pi_{x,y}^{\mathcal{E}}$ zusammen, falls τ multiplikativ ist. In diesem Fall ist τ als multiplikative treue Spur allerdings schon ein $*$ -Isomorphismus $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, so daß wir nur die Hilbertraumspur reproduzieren.

Im allgemeinen wird tr aber größer als tr_τ sein wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr} \pi_{e_m, e_m}^{\mathcal{E}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(\langle e_n | e_m \rangle_{\mathcal{E}} \langle e_m | e_n \rangle_{\mathcal{E}}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(\langle e_m | e_n \rangle_{\mathcal{E}}^* \langle e_m | e_n \rangle_{\mathcal{E}}) \\
&\geq \tau(\langle e_m | e_m \rangle_{\mathcal{E}}^* \langle e_m | e_m \rangle_{\mathcal{E}}) \\
&\geq (\tau(\langle e_m | e_m \rangle_{\mathcal{E}}))^2 \\
&= \|e_m\|_{H_\tau}^2 \\
&= 1 \\
&= \mathrm{tr} \pi_{e_m, e_m}^{H_\tau} \\
&= \mathrm{tr}_\tau \pi_{e_m, e_m}^{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Hier wurde die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\tau(a^*b) \leq \sqrt{\tau(a^*a)\tau(b^*b)}$ und die Normiertheit der Spur benutzt.

Zusammenfassend läßt sich feststellen: Die tr_τ -Spur ist zwar nur auf dem Bild der adjungierbaren Moduloperatoren in der GNS-Darstellung definiert, auf diesen aber im allgemeinen kleiner als die Hilbertraumspur, so daß das entsprechende Spurklasseideal im allgemeinen größer ist:

$$\pi_\tau(\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \mathrm{tr}_\tau)) \supset \pi_\tau(\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})) \cap \mathcal{L}^1(H_\tau, \mathrm{tr})$$

3.1.7 Bemerkung (tr_τ für Standardhilbertmoduln)

Ist \mathcal{E} ein Standard- \mathcal{A} -Modul $H \otimes \mathcal{A}$ (Tensorprodukt von Hilbertmoduln) mit einem Hilbertraum H , so ist der GNS-Darstellungsraum H_τ von \mathcal{E} gerade gegeben durch $H_\tau = H \otimes h_\tau$ (Tensorprodukt von Hilberträumen), wenn h_τ der GNS-Darstellungsraum von \mathcal{A} ist. Auf den Elementartensoren $x \otimes a, y \otimes b \in \mathcal{E}$ wird daher

$$\begin{aligned}\text{tr}_{\mathcal{E}} \pi_{x \otimes a, y \otimes b}^{\mathcal{E}} &= \langle y \otimes b | x \otimes a \rangle_{\mathcal{E}} \\ &= \langle y | x \rangle_H b^* a, \\ \pi_{x \otimes a, y \otimes b}^{H_\tau} &= \pi_{x, y}^H \otimes \pi_{a, b}^{h_\tau}, \\ \pi_{x \otimes a, y \otimes b}^{\mathcal{E}} &= \pi_{x, y}^H \otimes \pi_{a, b}^{\mathcal{A}} \\ &= \pi_{x, y}^H \otimes ab^*.\end{aligned}$$

Mit den Standardspuren $\text{tr}_H, \text{tr}_{h_\tau}$ auf den beiden Hilberträumen H, h_τ gilt dann

$$\begin{aligned}\text{tr} \pi_{x \otimes a, y \otimes b}^{H_\tau} &= \text{tr}_\tau \pi_{x \otimes a, y \otimes b}^{\mathcal{E}} \\ &= \langle y | x \rangle_H \tau(b^* a) \\ &= \text{tr}_H(\pi_{x, y}^H) \text{tr}_{h_\tau}(\pi_{a, b}^{h_\tau}).\end{aligned}$$

Deswegen folgt schließlich

$$\begin{aligned}\text{tr} &= \text{tr}_H \otimes \text{tr}_{h_\tau}, \\ \text{tr}_\tau &= \text{tr}_H \otimes \tau.\end{aligned}$$

3.1.8 Lemma (tr für tr_τ -Spurklasse)

Sei $\mathcal{E} = H \otimes \mathcal{A}$ wie oben. Ist \mathcal{A} unendlichdimensional mit einer unitären Orthonormalbasis für h_τ , so ist 0 der einzige tr_τ -Spurklasseoperator mit endlicher Standardspur. Insbesondere sind alle Hilbert- \mathcal{A} -Untermodule unendlichdimensionale Vektorräume.

Beweis Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von h_τ aus unitären Elementen von \mathcal{A} . Dann ist

$$\begin{aligned}\text{tr}_{h_\tau} \pi_{a, b}^{\mathcal{A}} &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x_n | ab^* x_n \rangle_{h_\tau} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(x_n^* ab^* x_n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \tau(ab^*).\end{aligned}$$

□

3.1.9 Lemma (Nichtexistenz endlichdimensionaler Moduln)

Ist \mathcal{A} unendlichdimensional mit einer unitären Orthonormalbasis für h_τ , so sind alle projektiven Hilbert- \mathcal{A} -Moduln unendlichdimensionale Vektorräume.

Beweis Ist \mathcal{E} ein projektiver Hilbert- \mathcal{A} -Modul, so ist \mathcal{E} ein direkter Summand eines freien Moduls $H \otimes \mathcal{A}$ für einen geeigneten Hilbertraum H , und wir können 3.1.8 anwenden. □

3.2 Spektraltheorie

3.2.1 Lemma (Spektralprojektionen)

Sei D ein selbstadjungierter⁴ \mathcal{A} -elliptischer Operator und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \text{spec } D$, $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Dann ist die zugehörige Spektralprojektion⁵ $P_{[\lambda_1, \lambda_2]}$ \mathcal{A} -kompakt. Ist $e^{-tD^2} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \text{tr}_\tau)$ für $t > 0$, so sind die Spektralprojektionen in der tr_τ -Spurklasse.

Beweis

Reduktion auf $D \geq 0$ Ist $\text{spec } D = \mathbb{R}$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \text{spec } D$. Wir zeigen, daß wir für den Beweis der \mathcal{A} -Kompaktheit $D \geq 0$ voraussetzen können. Sei dazu

$$\begin{aligned} D' &:= f(D) \text{ mit} \\ f(x) &:= x - \lambda_0 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dann ist $0 \notin \text{spec } D'$. Setzen wir $g(x) := (1 + x^2)^{-1}$, so wird

$$\begin{aligned} (1 + D'^2)^{-1} &= g \circ f(D) \\ &= g(D)b(D) \text{ mit} \\ b(x) &= \frac{g \circ f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{1 + (x - \lambda_0)^2}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

Da b stetig und beschränkt ist, ist $b(D) \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. Ist D \mathcal{A} -elliptisch, also $g(D) \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, so folgt $g(D)b(D) \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, d. h. D' ist \mathcal{A} -elliptisch. Bezeichnen wir die Spektralprojektionen von D' mit P' , so ist offenbar $P'(\lambda) = P(\lambda + \lambda_0)$, so daß es genügt, P' auf \mathcal{A} -Kompaktheit zu untersuchen.

Schließlich setzen wir $D'' := |D'|$. Dann ist D'' schon nach Definition \mathcal{A} -elliptisch, nach Konstruktion positiv und nach Voraussetzung strikt positiv wegen $0 \notin \text{spec } D'$. Bezeichnen wir die Spektralprojektionen von D'' wiederum mit P'' , so ist

$$\begin{aligned} P''(\lambda) &= 1_{(-\infty, \lambda]}(D'') \\ &= (1_{(-\infty, \lambda]} \circ |\cdot|)(D') \\ &= 1_{[-\lambda, \lambda]}(D') \\ &= P'_{[-\lambda, \lambda]}. \end{aligned}$$

⁴Wie für Hilbertraumoperatoren heißt ein Hilbertmoduloperator selbstadjungiert, wenn er adjungierbar ist und mit seinem Adjungierten übereinstimmt.

⁵Ist $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \text{spec } D$, so ist $P_{[\lambda_1, \lambda_2]} = P_{(\lambda_1, \lambda_2)} = P_{[\lambda_1, \lambda_2]}$.

Daher wird für $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$

$$\begin{aligned} P''_{(\lambda_1, \lambda_2]} &= P''(\lambda_2) - P''(\lambda_1) \\ &= P'_{[-\lambda_2, \lambda_2]} - P'_{[-\lambda_1, \lambda_1]} \\ &= P'_{[-\lambda_2, -\lambda_1) \cup (\lambda_1, \lambda_2]} \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $0 \notin \text{spec } D'$ und daher $P'_{[0, \infty)}, P'_{(-\infty, 0]} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, so daß

$$P'_{(\lambda_1, \lambda_2]} = P''_{(\lambda_1, \lambda_2]} P'_{[0, \infty)} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \text{ und} \quad (3.2.1)$$

$$P'_{[-\lambda_2, -\lambda_1)} = P''_{(\lambda_1, \lambda_2]} P'_{(-\infty, 0]} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \quad (3.2.2)$$

ist, falls $P''_{(\lambda_1, \lambda_2]} \in \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ ist. Ist $\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_2$, so schreiben wir

$$P'_{[\lambda_1, \lambda_2]} = P'_{[\lambda_1, 0]} + P'_{(0, \lambda_2]}$$

und wenden (3.2.1) und (3.2.2) an. Es genügt daher, P'' auf \mathcal{A} -Kompaktheit zu untersuchen.

\mathcal{A} -Kompaktheit Wir zeigen nun, daß sich jede Spektralprojektion $P_{[\lambda_1, \lambda_2]}$ zu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \text{spec } D$ durch den stetigen Funktionalkalkül aus $S := (1 + D^2)^{-1}$ ableiten läßt und somit selbst in $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ liegt. Dazu beachten wir, daß $S^{-1} = D^2 + 1$ dicht definiert (D regulär), selbstadjungiert und nach unten durch 1 beschränkt ist. Daher existiert $\sqrt{S^{-1} - 1}$ und ist positiv und selbstadjungiert. Nach dem Spektralabbildungssatz ist

$$\begin{aligned} z \in \text{spec } \sqrt{S^{-1} - 1} &\Leftrightarrow (z^2 + 1)^{-1} \in \text{spec } S \\ &\Leftrightarrow z \in \text{spec } D. \end{aligned}$$

Daher existiert für alle z in der Resolventenmenge von D der Operator

$$R_z := \left(z - \sqrt{S^{-1} - 1} \right)^{-1}.$$

Da die Funktion

$$\lambda \mapsto \left(z - \sqrt{\lambda^{-1} - 1} \right)^{-1}$$

stetig und beschränkt ist auf jeder abgeschlossenen Menge, die $(z^2 + 1)^{-1}$ nicht enthält, ist R_z für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \text{spec } D$ in der von S erzeugten C^* -Algebra und damit in $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, ist also \mathcal{A} -kompakt. Da

$$P_{[\lambda_1, \lambda_2]} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c R_z dz$$

ist für einen geeigneten geschlossenen Weg c in $\mathbb{C} \setminus \text{spec } D$ mit Windungszahl 1, der $c \cap \mathbb{R} = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ erfüllt, ist $P_{[\lambda_1, \lambda_2]}$ in der von allen R_z erzeugten C^* -Algebra.

Spurklasseneigenschaft Sei nun e^{-tD^2} in der tr_τ -Spurklasse⁶. Wegen

$$\begin{aligned} P_{[\lambda_1, \lambda_2]} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dP(\lambda) \\ &\leq e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-t(\lambda - \lambda_1)^2} dP(\lambda) \\ &\leq e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-t(\lambda - \lambda_1)^2} dP(\lambda) \\ &= e^{t(\lambda_2 - \lambda_1)^2} e^{-tD^*D} \end{aligned}$$

erben dann die Spektralprojektionen die Spurklasseneigenschaft von e^{-tD^2} .

3.2.1

Ist λ ein isolierter Eigenwert, so ist $P_\lambda := P_{[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]}$ für genügend kleines ε die Projektion auf den Eigenraum zu λ , unabhängig von ε . P_λ erfüllt dann die Voraussetzungen von 3.2.1, und wir können nach der Dimension des Eigenraumes fragen:

3.2.2 Theorem (isolierte Eigenwerte)

Ist λ ein isolierter Eigenwert eines selbstadjungierten \mathcal{A} -elliptischen Operators D , so ist der zugehörige Eigenraum E_λ ein (algebraisch) endlich erzeugter projektiver Hilbert- \mathcal{A} -Modul, und die Projektion P_λ ist \mathcal{A} -endlich. Ist e^{-tD^2} in der tr_τ -Spurklasse, so auch P_λ , d. h. E_λ hat endliche τ -Dimension $\text{tr}_\tau P_\lambda$.

Erfüllen \mathcal{E}, \mathcal{A} die Voraussetzungen von 3.1.9 auf Seite 30, so hat E_λ unendliche Hilbertdimension $\text{tr} P_\lambda$ für jeden isolierten Eigenwert λ von D . Insbesondere hat D nur wesentliches Spektrum.

Beweis P_λ ist als Spektralprojektion eines selbstadjungierten Operators selbstadjungiert⁷ und nach 3.2.1 \mathcal{A} -kompakt. Damit ist der Eigenraum E_λ als Bild des abgeschlossenen, adjungierbaren Projektors P_λ ein abgeschlossener, komplementierbarer \mathcal{A} -Modul. Weil $P_\lambda|_{E_\lambda} = \mathbb{I}$ \mathcal{A} -kompakt ist, muß E_λ schon algebraisch endlich erzeugt und projektiv sein, da algebraisch endlich erzeugte \mathcal{A} -Moduln E genau diejenigen mit unitem $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(E)$ und außerdem automatisch projektiv sind (siehe z. B. Wegge-Olsen, 1993, Theorem 15.4.2 und Korollar 15.4.8).

Ist $e^{-tD^2} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \text{tr}_\tau)$, so auch P_λ nach 3.2.1, und wir können unter den geeigneten Voraussetzungen 3.1.9 anwenden.

3.2.2

Die wesentliche Idee in folgendem Beweis geht auf Sunada (1992) zurück:

3.2.3 Theorem (Bandstruktur)

$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ habe die Kadisonseigenschaft bezüglich tr_τ (siehe 1.3.3 auf Seite 6). Dann hat das Spektrum jedes selbstadjungierten \mathcal{A} -elliptischen Operators D mit $e^{-tD^2} \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \text{tr}_\tau)$ Bandstruktur.

⁶Wir setzen nun nicht mehr Positivität von D voraus.

⁷Dadurch spielen die Schwierigkeiten, denen man bei der Indextheorie für nichtselbstadjungierte Operatoren in Hilbertmoduln begegnet, hier keine Rolle.

Beweis Seien $a = \lambda_0 < \dots < \lambda_n = b \in \mathbb{R} \setminus \text{spec } D$, so daß $P_{[\lambda_i, \lambda_{i+1}]} \neq 0$ für $0 \leq i \leq n-1$, so daß also $\text{spec } D$ mindestens n Komponenten in $[a, b]$ hat. Dann ist

$$P_{[a,b]} = \sum_{i=0}^{n-1} P_{[\lambda_i, \lambda_{i+1}]}$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{tr}_\tau P_{[a,b]} &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{tr}_\tau P_{[\lambda_i, \lambda_{i+1}]} \\ &\geq nc_K. \\ \Leftrightarrow n &\leq \frac{1}{c_K} \text{tr}_\tau P_{[a,b]}, \end{aligned}$$

da alle hier auftretenden Projektionen nach 3.2.1 in der tr_τ -Spurklasse liegen. 3.2.3

Ist $c_K = 0$, so ist 3.2.3 nicht anwendbar, stattdessen scheint die Ausbildung von Spektren mit der Struktur einer Cantormenge⁸ möglich. Die Untersuchung von Beispielen zeigt, daß das Öffnen dieser erlaubten Lücken von der genauen Struktur der jeweiligen Operatoren abhängt und nur schwer zu kontrollieren ist. Um generische Resultate zu erhalten, müssen wir sicher stellen, daß nicht nur $c_K = 0$ ist, sondern daß die Spur auf „sehr vielen“ Projektionen beliebig klein wird. Aus der Arbeit Choi & Elliott (1990) übernehmen wir

3.2.4 Theorem (Cantorspektrum)

Sei \mathcal{A} eine C^ -Algebra mit einem treuen Zustand Φ . Jedes selbstadjungierte Element sei beliebig gut approximierbar durch ein Element mit endlichem Spektrum, das so gewählt werden kann, daß Φ auf dessen minimalen Spektralprojektionen einen beliebig kleinen Wert annimmt. Dann sind die selbstadjungierten Elemente mit Cantorspektrum dicht in allen selbstadjungierten.*

Beweis Sei $x \in \mathcal{A}_{sa}$, $\varepsilon > 0$. Wir konstruieren eine Folge von selbstadjungierten Approximierenden $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit endlichem Spektrum und positive reelle Folgen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist $\|x_n - y\| \leq \delta_n$, so ist das mittlere Drittel (mit Mittelpunkt $s_{n,i}$) jeder spektralen Lücke von x_n in einer spektralen Lücke von y enthalten.
2. Ist zusätzlich $\|x_n - y\| \leq \varepsilon_n$, so ist

$$\Phi(P_{[s_{n,i}, s_{n,i+1}]}(y)) < \frac{1}{m} \text{ für alle } i.$$

⁸ Eine Cantormenge $X \subset Y$ in einem topologischen Raum Y ist eine nirgends dichte (der Abschluß hat leeres Inneres) Menge ohne isolierte Punkte.

Schließlich werden wir zeigen, daß der Grenzwert x_∞ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, x approximiert und Cantorspektrum hat.

Konstruktion von x_2 : Wähle $x_1 \in \mathcal{A}_{sa}$ mit endlichem Spektrum, $\|x - x_1\| < \varepsilon/2$ und $\Phi < 1/2$ auf den minimalen Spektralprojektionen. Wir definieren $3\delta_1$ als den kleinsten Abstand zwischen zwei Punkten von $\text{spec } x_1$. Ist $y \in \mathcal{A}_{sa}$ mit endlichem Spektrum, so daß $\|x_1 - y\| \leq \delta_1$, so⁹ ist das mittlere Drittel jeder spektralen Lücke von x_1 enthalten in einer spektralen Lücke von y . Nach Voraussetzung ist $\Phi(P_{[s_{1,i}, s_{1,i+1}]}(x_1)) < 1/2$ für alle i . Wegen der Stetigkeit von Φ gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$, so daß $\Phi(P_{[s_{1,i}, s_{1,i+1}]}(y)) < 1/2$ ist, falls auch noch $\|x_1 - y\| \leq \varepsilon_1$.

Wir wählen nun gemäß den Voraussetzungen eine Approximation $x_2 \in \mathcal{A}_{sa}$ von x_1 mit endlichem Spektrum und $\Phi < 1/4$ auf den minimalen Spektralprojektionen (von x_2) derart, daß

$$\|x_1 - x_2\| \leq \min\{\delta_1/2, \varepsilon_1/2, \varepsilon/4\}$$

ist. Dann ist das mittlere Drittel jeder spektralen Lücke von x_1 enthalten in einer spektralen Lücke von x_2 , $\Phi(P_{[s_{1,i}, s_{1,i+1}]}(x_2)) < 1/2$ und $\Phi(P_{[s_{2,i}, s_{2,i+1}]}(x_2)) < 1/4$.

Konstruktion von x_n : Wir definieren $3\delta_{n-1}$ durch den kleinsten Abstand zwischen zwei Punkten von $\text{spec } x_{n-1}$. Ist $y \in \mathcal{A}_{sa}$ mit endlichem Spektrum so gewählt, daß $\|x_{n-1} - y\| \leq \min\{2^{-(n-1)}\delta_m \mid 1 \leq m < n\}$, so folgt $\|x_m - y\| \leq \delta_m$ für $1 \leq m < n$. Daher ist für jedes solche m das mittlere Drittel jeder spektralen Lücke von x_m enthalten in einer spektralen Lücke von y . Nach Konstruktion ist $\Phi(P_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]}(x_m)) < 1/m$ für alle i und für $1 \leq m < n$. Wie oben gibt es wegen der Stetigkeit von Φ ein $\varepsilon_n > 0$, so daß $\Phi(P_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]}(y)) < 1/m$ ist, falls auch noch $\|x_m - y\| \leq \varepsilon_n$ für $1 \leq m < n$.

Wir wählen also eine Approximation $x_n \in \mathcal{A}_{sa}$ von x_{n-1} mit endlichem Spektrum und $\Phi < 1/2n$ auf den minimalen Spektralprojektionen (von x_n) derart, daß

$$\|x_{n-1} - x_n\| \leq \min\{2^{-(n-1)}\delta_m, 2^{-(n-1)}\varepsilon_m, 2^{-n}\varepsilon \mid 1 \leq m < n\}$$

ist. Nach dem Teleskopreihenprinzip ist dann

$$\|x_m - x_n\| \leq \min\{\delta_m, \varepsilon_m, \varepsilon/2\} \text{ für } 1 \leq m < n,$$

so daß $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die eingangs beschriebenen Eigenschaften hat.

Approximation durch x_∞ : $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offenbar eine Cauchyfolge. Der Grenzwert sei mit x_∞ bezeichnet. Aus der Konstruktion der Folge ergibt sich

$$\begin{aligned} \|x - x_\infty\| &< \varepsilon \text{ und} \\ \|x_m - x_\infty\| &\leq \min\{\delta_m, \varepsilon_m, \varepsilon/2\} \text{ für } 1 \leq m < n. \end{aligned}$$

Daher ist jedes mittlere Drittel einer spektralen Lücke von x_m enthalten in einer spektralen Lücke von x_∞ , und $\Phi(P_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]}(x_\infty)) < 1/m$ für jedes i und m .

⁹Aus $\|x_1 - y\| \leq \delta_1$ folgt, daß der Hausdorffabstand der beiden Spektra nicht größer als δ_1 ist.

x_∞ **hat Cantorspektrum:** Wir nehmen an, daß $\text{spec } x_\infty$ keine Cantormenge ist. Dann hat $\text{spec } x_\infty$ einen relativ zu $\text{spec } x_\infty$ inneren Punkt λ , d.h. λ besitzt eine in $\text{spec } x_\infty$ offene Umgebung U . Wir wählen eine stetige Funktion f auf $\text{spec } x_\infty$ mit $0 \leq f \leq 1$, $f(\lambda) = 1$ und $f = 0$ auf dem Komplement von U . Dann ist $f(x_\infty) \in \mathcal{A}_{sa} \setminus 0$ und daher $\Phi(f(x_\infty)) \neq 0$, da Φ nach Voraussetzung treu ist.

Andererseits gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ zwei aufeinanderfolgende spektrale Lücken von x_m , die U umrahmen, d.h. es gibt ein i mit $(s_{m,i}, s_{m,i+1}) \supset U \ni \lambda$. Nach Konstruktion ist dann

$$\begin{aligned} f(x_\infty) &\leq P_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]} \\ \Rightarrow \Phi(f(x_\infty)) &\leq \Phi(P_{[s_{m,i}, s_{m,i+1}]}) \\ &< 1/m \end{aligned}$$

für alle m , also $\Phi(f(x_\infty)) = 0$ im Widerspruch zu $f(x_\infty) \neq 0$. 3.2.4

Die in 3.2.4 auftretenden Operatoren haben insbesondere reellen Rang 0, d.h. die invertierbaren selbstadjungierbaren Elemente liegen dicht in allen selbstadjungierten:

3.2.5 Definition und Hilfssatz (reeller Rang)

Sei \mathcal{A} eine unitale C^* -Algebra. Der **reelle Rang von \mathcal{A}** ist definiert durch

$$\text{RR}(\mathcal{A}) = \min\{m \in \mathbb{N}_0 \mid \forall_{n \geq m+1} \text{RR}_n(\mathcal{A})\}, \text{ wobei} \quad (3.2.3)$$

$$\text{RR}_n(\mathcal{A}) = \left\langle \forall_{x \in \mathcal{A}_{sa}^n} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{y \in \mathcal{A}_{sa}^n} \sum_{k=1}^n y_k^2 \in \mathcal{A}^\times \wedge \left\| \sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2 \right\| < \varepsilon \right\rangle \quad (3.2.4)$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\text{RR}_n(\mathcal{A}) \Rightarrow \text{RR}_{n+1}(\mathcal{A})$. Folgende Bedingungen sind äquivalent:

1. $\text{RR}(\mathcal{A}) = 0$
2. $\mathcal{A}_{sa}^\times \subset \mathcal{A}_{sa}$ dicht
3. Die selbstadjungierten Elemente mit endlichem Spektrum sind dicht in \mathcal{A}_{sa} .

Wir sagen, daß \mathcal{A} **reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand** hat (**RR1₀**), falls \mathcal{A} die Voraussetzungen von 3.2.4 auf Seite 34 erfüllt.

Beweis

$\text{RR}_n(\mathcal{A}) \Rightarrow \text{RR}_{n+1}(\mathcal{A})$: Sei $x \in \mathcal{A}_{sa}^{n+1}$ und $\tilde{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_{sa}^n$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\tilde{y} \in \mathcal{A}_{sa}^n$, so daß

$$\sum_{k=1}^n \tilde{y}_k^2 \in \mathcal{A}^\times \wedge \left\| \sum_{k=1}^n (\tilde{y}_k - x_k)^2 \right\| < \varepsilon.$$

Für alle $k = 1, \dots, n+1$ gilt $x_k^2 \geq 0$, und $\sum_{k=1}^n \tilde{y}_k^2 > 0$. Wir setzen $y := (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, x_{n+1})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} y_k^2 &\geq \sum_{k=1}^n y_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \tilde{y}_k^2 > 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} y_k^2 &\in \mathcal{A}^\times \end{aligned}$$

und schließlich

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} (y_k - x_k)^2 \right\| = \left\| \sum_{k=1}^n (\tilde{y}_k - x_k)^2 \right\| < \varepsilon$$

1 \Rightarrow 2 nach Definition.

2 \Rightarrow 1 wegen $\text{RR}_0(\mathcal{A}) \Rightarrow \text{RR}_{n+1}(\mathcal{A})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3 \Rightarrow 2: Sei $x \in \mathcal{A}_{sa}$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $y \in \mathcal{A}_{sa}$ mit endlichem Spektrum¹⁰, so daß $\|x - y\| < \varepsilon/2$ ist. Ist y invertierbar, so sind wir fertig, andernfalls wählen wir ein $\delta > 0$, so daß $\text{spec } y \cap B_\delta(0) = \{0\}$ ist. Dann ist $\tilde{y} := y + \frac{1}{2} \min\{\delta, \varepsilon\} \mathbb{1}$ invertierbar, und

$$\|\tilde{y} - x\| \leq \|y - x\| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

2 \Rightarrow 3: Sei $x \in \mathcal{A}_{sa}$. Wir zeigen zunächst, daß sich x approximieren läßt durch ein selbstadjungiertes Element mit endlich vielen Lücken. Wir wählen dazu eine reelle Folge $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit paarweise verschiedenen Elementen, die dicht im Intervall $[-\|x\|, \|x\|]$ ist. Wir setzen $x_1 := x$ und wählen induktiv $y_n \in \mathcal{A}_{sa}^\times$, so daß

$$\begin{aligned} \|(x_n - s_n \mathbb{1}) - y_n\| &< 2^{-n} \min\{\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}, \text{ wobei} \\ \varepsilon_i &= \text{dist}\{0, \text{spec } y_i\} > 0, \end{aligned}$$

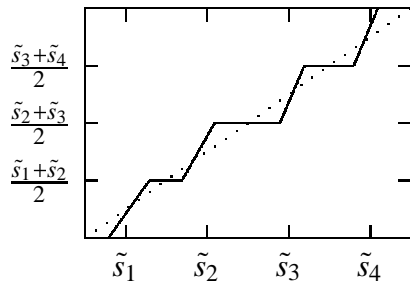
da y_i invertierbar ist, und definieren

$$x_{n+1} := y_n + s_n \mathbb{1}.$$

¹⁰Insbesondere liegt jeder Punkt des Spektrums diskret im Spektrum.

Dann ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x_n\| &< 2^{-n} \min\{\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\} \\
 \Rightarrow \|x_{n+1} - x\| &\leq \sum_{i=1}^n \|x_{i+1} - x_i\| \\
 &< \sum_{i=1}^n 2^{-i} \min\{\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1}\} \\
 &\leq \min\{\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}.
 \end{aligned}$$



Weiterhin ist $\text{spec } x_{n+1} = s_n + \text{spec } y_n$, und daher ist $B_{\varepsilon_n}(s_n)$ in der Resolventenmenge von x_n . Die Approximationsrate ist gerade so gewählt, daß diese Lücken in jedem Schritt (bei möglicher Verkleinerung) offen bleiben. Wir konstruieren nun zu jedem x_{n+1} eine Approximation mit endlichem Spektrum. Dazu ordnen wir bei festem n die $s_i, 1 \leq i \leq n$ aufsteigend an als

$\tilde{s}_1 < \dots < \tilde{s}_n$ und setzen $\delta_n := \max\{\tilde{s}_{i+1} - \tilde{s}_i \mid 1 \leq i < n\}$. Wir definieren eine stetige, monoton wachsende Funktion f_n durch

$$f_n(\lambda) := \begin{cases} \frac{\tilde{s}_{i+1} + \tilde{s}_i}{2}, & \text{falls } \lambda \in (\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}) \cap \text{spec } x_{n+1}, \\ \text{stetig m. w.} & \text{sonst,} \end{cases}$$

so daß $z_{n+1} := f_n(x_{n+1}) \in \mathcal{A}_{sa}$ ist. f_n komprimiert das Spektrum zwischen zwei Lücken auf einen Punkt. Mit den Spektralprojektionen

$$\begin{aligned}
 p_i &= P_{[\tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}]}(x_{n+1}), 0 \leq i \leq n, \text{ wobei} \\
 \tilde{s}_0 &= -\|x_{n+1}\| - 1, \\
 \tilde{s}_{n+1} &= \|x_{n+1}\| + 1,
 \end{aligned}$$

die alle zu Intervallen mit Endpunkten in der Resolventenmenge gehören, also selbst in \mathcal{A} liegen, gilt dann

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^n \frac{\tilde{s}_i + \tilde{s}_{i+1}}{2} p_i.$$

Daher ist $\text{spec } z_{n+1} \subset \left\{ \frac{\tilde{s}_i + \tilde{s}_{i+1}}{2} \mid 0 \leq i \leq n \right\}$, und mit der Spektralschar $P(\lambda)$ von x_{n+1} gilt

$$\begin{aligned}
 \|z_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \int |\lambda - f_n(\lambda)| dP(\lambda) \\
 &\leq 2\delta_n \|x_{n+1}\| \\
 \Rightarrow \|z_{n+1} - x\| &\leq 2\delta_n \|x_{n+1}\| + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Da $\delta_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $\|x_{n+1}\|$ beschränkt ist, können wir die Approximation beliebig gut machen. 3.2.5

3.2.6 Bemerkung (Kadisoneigenschaft und $RR I_0$)

1. Kadisoneigenschaft und Eigenschaft $RR I_0$ schließen sich gegenseitig aus, da erstere die Existenz von Projektionen mit beliebig kleinem Zustand verbietet, letztere aber erfordert.
2. C^* -Algebren \mathcal{A} mit $RR I_0$ können aber Operatoren mit Bandstruktur enthalten: Ist \mathcal{A} eine irrationale Rotationsalgebra, so hat \mathcal{A} nach B.4.2 auf Seite 100 die Eigenschaft $RR I_0$. \mathcal{A} enthält aber eine Unteralgebra, die isomorph zu $C(S^1)$ ist und daher ausschließlich aus Operatoren mit Bandspektrum besteht.
3. Umgekehrt kann eine C^* -Algebra \mathcal{A} mit Kadisoneigenschaft kein selbstadjungiertes Element mit Cantorspektrum enthalten: Hat $x \in \mathcal{A}_{sa}$ Cantorspektrum, so ist jeder Punkt von $\text{spec } x$ ein Häufungspunkt von $\text{spec } x$ und von $\mathbb{R} \setminus \text{spec } x$, so daß x im Widerspruch zu Theorem 3.2.3 kein Bandspektrum hat.
4. Hat \mathcal{A}_1 die Kadisoneigenschaft und \mathcal{A}_2 die Eigenschaft $RR I_0$, so hat $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ offenbar keine der beiden Eigenschaften.

3.2.7 Bemerkung (reeller Rang und Dimension)

1. Ist \mathcal{A} kommutativ, also $\mathcal{A} = C(X)$ für einen topologischen Raum X , so ist $\text{RR}(\mathcal{A}) = \dim X$ für die übliche Dimensionsdefinition.
2. C^* -Algebren mit reellem Rang 0 sind also (nichtkommutative) 0-dimensionale Räume. Darunter fallen natürlich auch endliche diskrete Räume. Die Spurbedingung in 3.2.4 auf Seite 34 schließt jedoch endliche Räume aus: Nach dem Satz von Riesz-Kakutani ist jeder Zustand auf $C(X)$ gegeben durch das Integral bezüglich eines normierten Maßes μ , d.h. $\Phi(f) = \int f d\mu$ und $\mu(X) = 1$. Ein solcher Zustand ist treu genau dann, wenn jede offene Menge strikt positives Maß hat. Die Spurbedingung erzwingt dann, daß X Zusammenhangskomponenten mit beliebig kleinem Maß hat.
3. Jede W^* -Algebra hat reellen Rang 0, da sich mit dem meßbaren Funktionalkalkül ein Spektralpunkt beliebig nahe „ausschneiden“ läßt.
4. Die Eigenschaft RR_0 bleibt unter induktiven Limites erhalten, insbesondere hat $\mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ reellen Rang 0, falls $\text{RR}(\mathcal{A}) = 0$ ist.

3.2.8 Theorem (Cantorspektrum)

$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ habe reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand. Dann läßt sich jeder selbstadjungierte \mathcal{A} -elliptische Operator im Normresolventensinn approximieren durch einen selbstadjungierten Operator mit Cantorspektrum.

Beweis 3.2.4 auf Seite 34

□

3.3 Beispiele

In diesem Abschnitt stellen wir verschiedene Beispiele für abstrakte \mathcal{A} -elliptische Operatoren zusammen. Wir legen hier nur auf die zugrundeliegenden Strukturen Wert, für analytische Details wird auf die Literatur und die folgenden Kapitel verwiesen.

3.3.1 Beispiel (verallgemeinerte Harperoperatoren)

Sunada (1994) definiert magnetische Schrödingeroperatoren auf Graphen: Sei dazu X ein zusammenhängender, lokal endlicher Graph, χ eine \mathbb{C}^\times -wertige Abbildung (ein Gewicht) auf den orientierten Kanten $E(X)$, $o, t : E(X) \rightarrow X$ die Anfangs- und Endpunktabbildungen. Ein symmetrischer Operator auf $l^2(X)$ wird dann definiert durch

$$(H_\chi f)(x) = \sum_{\substack{e \in E(X) \\ o(e)=x}} \chi(e) f(t(e))$$

für $f \in l^2(X)$. Zwei Gewichte χ_1, χ_2 heißen **kohomolog**, falls es eine Funktion $s : X \rightarrow S^1$ gibt mit

$$\chi_1(e) = \chi_2(e) \frac{s(o(e))}{s(t(e))}$$

für $e \in E(X)$.

Weiterhin gebe es eine Gruppe Γ mit eigentlich un stetiger, freier Aktion auf X , so daß der Quotientengraph endlich ist (n Punkte). Ein Gewicht χ heißt **eichinvariant**, falls $\gamma^* \chi$ kohomolog zu χ ist für alle $\gamma \in \Gamma$. χ definiert dann einen Kozyklus $\Theta \in Z^2(\Gamma, S^1)$, so daß H_χ mit den getwisteten Rechtstranslationen (siehe B.2 auf Seite 93) vertauscht. Sunada konstruiert einen injektiven *-Homomorphismus

$$C_r^*(\Gamma, \Theta) \otimes M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{End}(l^2(X)),$$

in dessen Bild H_χ liegt. Andererseits ist

$$\mathcal{A} \otimes M(n, \mathbb{C}) = \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^n)$$

für den Hilbert- \mathcal{A} -Modul $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}^n$, der sich als Tensorprodukt aus dem trivialen Modul $\mathcal{A} = C_r^*(\Gamma, \Theta)$ und dem Hilbert- \mathbb{C} -Modul \mathbb{C}^n ergibt. Wie in 3.2.3 schließt Sunada auf Bandstruktur.

Alle spektralen Charakterisierungen dieses Kapitels sind anwendbar, sofern die C^* -Algebra $C_r^*(\Gamma, \Theta) \otimes M(n, \mathbb{C})$ die jeweiligen Voraussetzungen erfüllt.

Den gewöhnlichen Harperoperator erhält man für $E(X) = \Gamma = \mathbb{Z}^2$ und einen geeigneten Graphen X mit Koordinationszahl 4, den hexagonalen Harperoperator und das Quantenpendel für Graphen mit Koordinationszahl 6 bzw. 8. Die auftetenden C^* -Algebren sind Rotationsalgebren, so daß für rationalen Fluß Bandstruktur vorliegt, für irrationalen Fluß schwache Generizität von Cantorspektrum.

3.3.2 Beispiel (eichperiodische elliptische Operatoren)

Im nächsten Kapitel werden wir uns mit eichperiodischen elliptischen Operatoren befassen. In diesem Fall wird \mathcal{A} eine getwistete Gruppenalgebra (Linkstranslationen) sein und der Hilbertmodul ein Tensorprodukt $\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{H}$ mit einem Hilbertraum \mathcal{H} , so daß $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist.

3.3.3 Beispiel (elliptische Operatoren auf Hilbertmodulbündeln)

Mišćenko & Fomenko erweitern in ihrer Arbeit von 1980 den üblichen Begriff des Index eines Operators, indem sie Hilberträume durch Hilbertmoduln ersetzen: Sei dazu \mathcal{A} eine C^* -Algebra, M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit und E ein Bündel über M von Hilbert- \mathcal{A} -Moduln (ein **Hilbertmodulbündel**). Man kann dann wie gewohnt Sobolevnormen definieren, die nun allerdings von einem \mathcal{A} -Skalarprodukt herrühren. So erhält man eine Skala von Sobolev-Hilbert- \mathcal{A} -Moduln, für die sogar das Sobolevlemma gilt. An die Stelle der üblichen Pseudodifferentialoperatoren, deren Koeffizienten Vektorraumendomorphismen sind, treten \mathcal{A} -Pseudodifferentialoperatoren mit Koeffizienten im Bündel $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(E) := \bigcup_{x \in M} \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(E_x)$. Sie wirken mit den üblichen Eigenschaften zwischen den Sobolev-Hilbertmoduln. Symbole von \mathcal{A} -Pseudodifferentialoperatoren werden durch Schnitte in $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(E)$ repräsentiert. Ein elliptischer Operator schließlich besitzt wie im skalaren Fall automatisch eine \mathcal{A} -kompakte Resolvente und ist damit \mathcal{A} -elliptisch im Sinne von 3.1.1. Darüberhinaus sind elliptische Operatoren \mathcal{A} -Fredholm und besitzen daher einen Index in $K_0(\mathcal{A})$.

Einen Spezialfall stellen die periodischen elliptischen Operatoren dar: Sei dazu X eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit eigentlich unstetiger, isometrischer, kokompakter Aktion einer Gruppe Γ und D ein Γ -periodischer Operator wie in 4.4.1, $M := \Gamma \backslash X$. Weiterhin sei ρ die rechtsreguläre Darstellung¹¹ von Γ auf $\mathcal{A} := C_r^*(\Gamma)$. Dann ist $X \times_{\rho} \mathcal{A}$ ein \mathcal{A} -Bündel über M , auf dem D operiert. Außerdem trägt \mathcal{A} die Struktur eines trivialen Hilbert- \mathcal{A} -Moduls. Ist D elliptisch, so bestimmt D einen elliptischen Operator auf $X \times_{\rho} \mathcal{A}$.

Dies ist auch der Fall, in dem die allgemeine Theorie von Mišćenko & Fomenko Anwendung findet für die Novikovvermutung: Der Index in $K_0(\mathcal{A})$ ist homotopieinvariant, so daß die kanonische Paarung mit $K^0(\mathcal{A})$ eine Homotopieinvariante ergibt. Allerdings ist die Indexpaarung, die die höheren Signaturen in der Novikovvermutung liefert, zunächst eine Paarung mit $K_0(A)$ mit $A = \mathcal{R}\Gamma$ für die Algebra \mathcal{R} der Matrizen mit schnell abfallenden Koeffizienten. Für beschränkte Kozykel ist diese Paarung auf \mathcal{A} fortsetzbar. Um die Novikovvermutung zu zeigen, genügt es also, wenn jeder Kozyklus einen beschränkten Repräsentanten hat.

3.3.4 Beispiel (abstrakte elliptische Operatoren)

Der Begriff eines elliptischen Operators D auf einem Vektorraumbündel E über X läßt sich bekanntlich abstrakt in der Sprache der K -Theorie¹² fassen: $H = L^2(E)$ ist ein Hilbert- C -Modul, der eine Darstellung π der C^* -Algebra $C_{\infty}(X)$ durch punktweise Multiplikation trägt.

¹¹Die rechtsreguläre Darstellung wird üblicherweise auf dem Vektorraum $C\Gamma \subset C_r^*(\Gamma)$ oder dem Hilbertraum $\ell^2(\Gamma) \supset C_r^*(\Gamma)$ betrachtet. $C_r^*(\Gamma)$ ist aber offensichtlich selbst ein Γ -invarianter Unterraum.

¹²Wir berücksichtigen hier der Einfachheit halber keine Graduierung.

Ist D ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung 0, so definieren (H, π, D) ein Element in $\text{Ell}(C_\infty(X)) = \text{Ell}(C_\infty(X), \mathbb{C})$ und damit in $K^0(C_\infty(X)) = KK(C_\infty(X), \mathbb{C})$. Ist $C_\infty(X)$ unital, also X kompakt, so folgt aus der Definition (siehe B.3.3 auf Seite 96), daß D kompakte Resolvente hat (wegen $\pi(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$). Für eine C^* -Algebra \mathcal{A} kann man daher $\text{Ell}(\mathcal{A}) = \text{Ell}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ als die Menge der abstrakten elliptischen Operatoren ansehen.

Die Kasparov- (G, θ) -Moduln $\text{Ell}_{G, \theta', \theta}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ sind daher als abstrakte eichperiodische Operatoren aufzufassen. In B.3.5 auf Seite 99 hatten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} j_{G, \theta', \theta} : \text{Ell}_{G, \theta', \theta}(\mathcal{A}, \mathbb{C}) &\rightarrow \text{Ell}(\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta'} G, \mathbb{C} \times_{\text{id}, \theta} G) \\ (E, \phi, F) &\mapsto (E \times_{\text{id}, \theta} G, \tilde{\phi}, \tilde{F}) \end{aligned}$$

konstruiert. $j_{G, \theta', \theta}$ liefert uns also aus einem abstrakten elliptischen eichperiodischen Operator F auf einem Hilbertraum einen abstrakten elliptischen Operator \tilde{F} auf einem Hilbert- $C^*(G, \theta)$ -Modul. Ist $\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta'} G$ unital (z. B. \mathcal{A} unital und G diskret), also ein kompakter nichtkommutativer Raum, so folgt wiederum, daß \tilde{F} $C^*(G, \theta)$ -elliptisch ist.

Hierfür reicht auch, daß $\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta'} G$ Moritaäquivalent ist zu einer kompakten nichtkommutativen Geometrie im Sinne von Connes (1994). Zwei C^* -Algebren \mathcal{B}, \mathcal{C} heißen Moritaäquivalent, wenn es eine vollen¹³ Hilbert- \mathcal{B} -Modul \mathcal{E} gibt, so daß $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$ ist. Betrachten wir die Situation der eichperiodischen elliptischen Operatoren mit $\mathcal{C} := C_\infty(E) \times_{\alpha, \theta'} \Gamma$, so heißt Moritaäquivalenz zu $\mathcal{B} := C(M)$ ($M := \Gamma \backslash X$) gerade Existenz eines Hilbert- $C(M)$ -Moduls \mathcal{E} mit $\mathcal{K}_{C(M)}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$, d. h. Existenz eines stetigen Feldes von Hilberträumen über M , dessen Endomorphismenfeld isomorph zu \mathcal{C} ist. In Anhang C.2 auf Seite 103 schildern wir die Dixmier-Douady-Invariante als topologische Obstruktion für die Existenz eines solchen Feldes.

¹³ \mathcal{E} heißt voll, wenn $\{\langle x|y \rangle \mid x, y \in \mathcal{E}\}$ total in \mathcal{B} ist.

Kapitel 4

Eichperiodische elliptische Operatoren

In diesem Kapitel beschreiben wir eichperiodische elliptische Differentialoperatoren als konkrete Unterklasse der abstrakten eichperiodischen elliptischen Operatoren aus Kapitel 3, wenden die entsprechenden Resultate an und geben Beispiele.

4.1	Grundlegende Definitionen und Folgerungen	44
4.1.1	Definition und Hilfssatz: L^2 -Schnitte	44
4.1.2	Definition und Hilfssatz: minimaler Abschluß	44
4.1.3	Definition und Hilfssatz: Aktion auf Funktionen	45
4.1.4	Definition und Hilfssatz: eichperiodischer Operator	45
4.1.5	Hilfssatz: Kozykluseigenschaft	46
4.1.6	Bemerkung: exakter Kozyklus und Darstellung	46
4.1.7	Hilfssatz: Bündelmorphismen	47
4.1.8	Bemerkung: Lift der Aktion	47
4.1.9	Hilfssatz: Eigenschaften des Kozyklus	47
4.2	Hilbertraumoperatoren	48
4.2.1	Lemma: Parametrix	48
4.2.2	Korollar: wesentliche Selbstadjungiertheit	49
4.2.3	Theorem: Wärmeleitungskern	50
4.3	Hilbertmoduloperatoren	51
4.3.1	Lemma: Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul	52
4.3.2	Lemma: Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul	53
4.3.3	Lemma: \mathcal{A} -kompakte Operatoren	53
4.3.4	Theorem: eichperiodische Operatoren	54

4.3.5	Theorem: eichperiodische Moduloperatoren	54
4.4	Spezialfälle	54
4.4.1	Beispiel: periodischer elliptischer Operator	54
4.4.2	Beispiel: magnetischer Schrödingeroperator	54

4.1 Grundlegende Definitionen und Folgerungen

4.1.1 Definition und Hilfssatz (L^2 -Schnitte)

(X, g) sei eine glatte, orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit, (E, h^E) ein hermitesches¹ Vektorraumbündel über X . Auf den glatten Schnitten in E mit kompaktem Träger, $C_c^\infty(E)$, definiert

$$C_c^\infty(E) \times C_c^\infty(E) \ni (s_1, s_2) \mapsto \langle s_1 | s_2 \rangle_{L^2(E)} := \int_X h^E(s_1(x), s_2(x)) d\text{vol}_X(x) \in \mathbb{C} \quad (4.1.1)$$

ein Skalarprodukt. Die Vervollständigung von $C_c^\infty(E)$ bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_{L^2(E)}$ sei mit $L^2(E)$ bezeichnet. Im Falle des trivialen Bündels $E = X \times \mathbb{C}$ mit konstanter Fasermetric schreibt man $L^2(X \times \mathbb{C}) = L^2(X)$.

4.1.2 Definition und Hilfssatz (minimaler Abschluß)

(F, h^F) sei ein weiteres hermitesches Vektorraumbündel und $D : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(F)$ ein Differentialoperator. Betrachtet man D auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(D) := C_c^\infty(E)$, so wird D zu einem abschließbaren, unbeschränkten Operator in $L^2(E)$. Der Abschluß wird mit \bar{D} bezeichnet.

Beweis Als Differentialoperator ist D transponierbar, d. h. es gibt einen Differentialoperator $D^\dagger : C^\infty(F) \rightarrow C^\infty(E)$, so daß für alle $s_1 \in C_c^\infty(E)$, $s_2 \in C_c^\infty(F)$ gilt:

$$\langle Ds_1 | s_2 \rangle_{L^2(F)} = \langle s_1 | D^\dagger s_2 \rangle_{L^2(E)} \quad (4.1.2)$$

Sei nun $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(D)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Ds_n = y \in L^2(F)$. Dann ist für alle $s \in C_c^\infty(F)$

$$\begin{aligned} \langle y | s \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} Ds_n \middle| s \right\rangle_{L^2(F)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Ds_n | s \rangle_{L^2(F)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle s_n | D^\dagger s \rangle_{L^2(E)} \\ &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \middle| D^\dagger s \right\rangle_{L^2(E)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

¹Im Einklang mit der üblichen Konvention für Hilbertmoduln und der Konvention in der mathematischen Physik für Hilberträume fordern wir auch für eine hermitesche Metrik komplexe Linearität im rechten und Antilinearität im linken Eintrag.

somit ist D abschließbar.

4.1.2

Im folgenden werden wir stets $F = E$ annehmen.

4.1.3 Definition und Hilfssatz (Aktion auf Funktionen)

Sei Γ eine Gruppe, die auf (X, g) isometrisch von links operiert. Dann definiert

$$\begin{aligned}\Gamma \times C^\infty(X) &\ni (\gamma, f) \mapsto \gamma^* f, \\ \gamma^* f : X &\ni x \mapsto f(\gamma^{-1}x)\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

eine Linksaktion von Γ auf $C^\infty(X)$, die auf $L^2(X)$ eine unitäre Linksaktion induziert. Faßt man γ auf als Abbildung $X \rightarrow X$, so ist $\gamma^* = (\gamma^{-1})^*$ mit der üblichen Definition des Rückzugs (pull back) $\Phi^* f := f \circ \Phi$ für $\Phi \in C^\infty(X, X)$.

Die Aktion heißt **frei**, wenn für $x \in X, \gamma \in \Gamma$ gilt: $\gamma x = x \Rightarrow \gamma = e$. Die Aktion heißt **eigentlich unstetig**, wenn für jedes kompakte $K \subset X$ gilt: Die Menge $\{\gamma \in \Gamma \mid K \cap \gamma K \neq \emptyset\}$ ist kompakt². Der Quotient $M := \Gamma \backslash X$ einer freien eigentlich unstetigen Aktion ist eine glatte riemannsche Mannigfaltigkeit.

Die Aktion heißt **kokompakt**, wenn M kompakt ist.

Beweis Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, x \in X, f \in C^\infty(X)$ gilt:

$$\begin{aligned}(\gamma_1^* \gamma_2^* f)(x) &= (\gamma_2^* f)(\gamma_1^{-1}x) \\ &= f(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= f((\gamma_1 \gamma_2)^{-1}x) \\ &= ((\gamma_1 \gamma_2)^* f)(x)\end{aligned}$$

Da $\gamma \in \Gamma$ isometrisch bzgl. g auf X operiert, wird γ^* zu einer Isometrie bzgl. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf $L^2(E)$. Wegen $(\gamma^{-1})^* = (\gamma^*)^{-1}$ ist γ^* auch invertierbar.

4.1.3

Wir setzen im folgenden die Existenz einer freien, eigentlich unstetigen, kokompakten Aktion einer diskreten, abelschen Gruppe Γ voraus.

4.1.4 Definition und Hilfssatz (eichperiodischer Operator)

Es gebe eine **projektive Darstellung** U von Γ in den unitären Operatoren $\mathcal{U}(L^2(E))$ in dem Sinne, daß

$$\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \quad \exists_{\Theta(\gamma_1, \gamma_2) \in C(X, S^1)} \quad U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = \Theta(\gamma_1, \gamma_2) U_{\gamma_1 \gamma_2}.\tag{4.1.4}$$

U sei ein (projektiver) Lift der Γ -Aktion auf $C^\infty(X)$, d. h.

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(X) \quad \forall s \in L^2(E) \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad U_\gamma(\varphi s) = (\gamma^* \varphi) U_\gamma(s).\tag{4.1.5}$$

Darüberhinaus sei U glatt: $\forall \gamma \in \Gamma \quad U_\gamma(C^\infty(E) \cap L^2(E)) \subset C^\infty(E)$. Dann ist U_γ γ -lokal, d. h.

$$\forall s \in C^\infty(E) \quad \text{supp}(U_\gamma s) \subset \gamma \text{supp } s,\tag{4.1.6}$$

²Die beschriebene Menge ist also endlich, falls Γ diskret ist.

und bildet den Definitionsbereich $\mathcal{D}(D)$ von D in sich ab. D heißt **eichperiodisch**, falls auf $\mathcal{D}(D)$ gilt:

$$\forall_{\gamma \in \Gamma} [U_\gamma, D] = 0 \quad (4.1.7)$$

Beweis Sei $x \in X \setminus \text{supp } s$. Da $\text{supp } s$ abgeschlossen ist, gibt es eine Umgebung $O \subset X$ von x und $\varphi \in C_c^\infty(X)$ mit $\varphi|_O = 1$, $\varphi|_{\text{supp } s} = 0$. Dann ist $(1 - \varphi)s = s$ und damit auch

$$\begin{aligned} U_\gamma s &= U_\gamma ((1 - \varphi)s) \\ &= (1 - \gamma^* \varphi) U_\gamma s \\ &= 0 \text{ auf } \gamma O. \end{aligned}$$

Da U außerdem glatt ist, bildet es $C_c^\infty(E)$ in sich ab. 4.1.4

4.1.5 Hilfssatz (Kozykluseigenschaft)

Θ erfüllt die Kozyklusbedingung

$$\forall_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma} \Theta(\gamma_1, \gamma_2) \Theta(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) = \Theta(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) \gamma_1^* [\Theta(\gamma_2, \gamma_3)] \quad (4.1.8)$$

Beweis Dies folgt aus der Assoziativität $U_{\gamma_1}(U_{\gamma_2}U_{\gamma_3}) = (U_{\gamma_1}U_{\gamma_2})U_{\gamma_3}$ und der Projektivitätsbedingung (4.1.4):

$$\begin{aligned} U_{\gamma_1}(U_{\gamma_2}U_{\gamma_3}) &= U_{\gamma_1} \Theta(\gamma_2, \gamma_3) U_{\gamma_2 \gamma_3} \\ &= \gamma_1^* [\Theta(\gamma_2, \gamma_3)] U_{\gamma_1} U_{\gamma_2 \gamma_3} \\ &= \Theta(\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3) \gamma_1^* [\Theta(\gamma_2, \gamma_3)] U_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \\ (U_{\gamma_1}U_{\gamma_2})U_{\gamma_3} &= \Theta(\gamma_1, \gamma_2) U_{\gamma_1 \gamma_2} U_{\gamma_3} \\ &= \Theta(\gamma_1, \gamma_2) \Theta(\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3) U_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \end{aligned}$$

4.1.5

4.1.6 Bemerkung (exakter Kozyklus und Darstellung)

Θ definiert daher eine Klasse in der Gruppenkohomologie $H^2(\Gamma, C(X, S^1))$ (siehe B.1 auf Seite 90). Exakte 2-Kozykel sind von der Form

$$\Theta(\gamma, \gamma') = \sigma(\gamma) \gamma^* [\sigma(\gamma')] \sigma(\gamma \gamma')^{-1} \quad (4.1.9)$$

mit einem 1-Kozykel σ und definieren eine echte Darstellung von Γ durch

$$\tilde{U}_\gamma := \sigma(\gamma)^{-1} U_\gamma, \quad (4.1.10)$$

die ebenfalls mit D vertauscht, falls der Kozyklus konstant in $x \in X$ ist. Wir nehmen oBdA an, das Θ normiert ist, d.h. $\Theta(e, e) = 1$ (siehe B.1.1 auf Seite 90).

4.1.7 Hilfssatz (Bündelmorphismen)

U definiert eine Familie u von Vektorraumbündelisomorphismen auf E , die nicht strikt sind: $u_\gamma : E_x \rightarrow E_{\gamma x}$. u ist ein „projektiver Lift“ der Γ -Aktion von X auf E , d. h.

$$\forall_{\gamma_1 \gamma_2 \in \Gamma} u_{\gamma_1} u_{\gamma_2} = \Theta(\gamma_1, \gamma_2) u_{\gamma_1 \gamma_2} \quad (4.1.11)$$

mit dem gleichen Kozyklus Θ wie U . U wird von u induziert via

$$(U_\gamma s)(x) := u_\gamma s(\gamma^{-1} x). \quad (4.1.12)$$

Ist t ein Lift der Γ -Aktion von X auf E und T die entsprechende Aktion

$$(T_\gamma s)(x) := t_\gamma s(\gamma^{-1} x) \quad (4.1.13)$$

auf $C^\infty(X)$, so lassen sich u und U darstellen als $u = mt$ und $U = MT$, wobei m eine Familie strikter Vektorraumbündelisomorphismen ist.

Beweis Sei $v \in E_x$. Wir wählen $s \in C^\infty(E)$ mit $s(x) = v$ und setzen $u_\gamma^s(v) := (U_\gamma(s))(\gamma x) \in E_{\gamma x}$. Ist $\varphi \in C^\infty(x)$, $\varphi(x) = 1$, so folgt

$$\begin{aligned} u_\gamma^{\varphi s}(v) &= (\gamma^* \varphi)(\gamma x) (U_\gamma(s))(\gamma x) \\ &= u_\gamma^s(v), \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

d. h. $u_\gamma^s(v)$ hängt nur vom Wert von s im Punkt x ab; s wird daher in der Notation unterdrückt.

Die Morphismuseigenschaft ergibt sich aus der von U_γ , und $(u_\gamma)^{-1} = u_{\gamma^{-1}}$.

u induziert U per constructionem.

Gibt es einen (echten) Lift t , so wird $m := ut^{-1}$ der gewünschte strikte Morphismus:

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{t_\gamma^{-1}} & E & \xrightarrow{u_\gamma} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\gamma^{-1}} & X & \xrightarrow{\gamma} & X \end{array}$$

4.1.7

4.1.8 Bemerkung (Lift der Aktion)

Ist Θ exakt und \tilde{u} die Familie von Vektorraumbündelisomorphismen, die zu \tilde{U} aus 4.1.6 auf der gegenüberliegenden Seite gehört, so ist \tilde{u} ein echter Lift der Γ -Aktion von X auf E .

4.1.9 Hilfssatz (Eigenschaften des Kozyklus)

1. $\forall_{\gamma \in \Gamma} \Theta(\gamma, e) = \Theta(e, \gamma) = 1$
2. $\forall_{\gamma \in \Gamma} \Theta(\gamma, \gamma^{-1}) = \Theta(\gamma^{-1}, \gamma)$

Beweis

1. Setzt man in (4.1.8) $\gamma_2 := \gamma_3 := e$, so folgt $\Theta(\gamma_1, e) = \Theta(e, e)$. $\gamma_1 := \gamma_2 := e$ ergibt $\Theta(e, \gamma_3) = \Theta(e, e)$.
2. Setzt man $\gamma_3 := \gamma_2^{-1}$, so folgt $\Theta(\gamma_1, \gamma_2)\Theta(\gamma_1\gamma_2, \gamma_2^{-1}) = \Theta(e, e)\Theta(\gamma_2, \gamma_2^{-1})$, mit $\gamma_1 := \gamma_2^{-1}$ schließlich $\Theta(\gamma_2^{-1}, \gamma_2) = \Theta(\gamma_2, \gamma_2^{-1})$.

4.1.9

4.2 Hilbertraumoperatoren

Wie in (Brüning & Sunada, 1992b, 1996) kann man eine Parametrix für einen elliptischen eichperiodischen Operator D konstruieren:

4.2.1 Lemma (Parametrix)

Ein elliptischer eichperiodischer Operator besitzt eine fastlokale Parametrix.

Beweis Sei \mathcal{D} ein Fundamentalbereich³ für die Γ -Aktion auf X und U_2 eine relativ kompakte Umgebung von $\overline{\mathcal{D}}$ in X . Dann gibt es eine Parametrix P von D über U_2 , so daß $PD = \mathbb{I} + S$ auf $C_c^\infty(U_2)$ mit einem Glättungsoperator S . Da S und P fastlokal gewählt werden können in dem Sinne, daß sie mit einem in einer beliebig kleinen Umgebung der Diagonale getragenen Integralkern konstruiert werden können, gibt es offene Mengen U_0, U_1 mit

$$\overline{\mathcal{D}} \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_2$$

derart, daß

$$P(C_c^\infty(E|_{\sim \overline{U_1}})) \cap C_c^\infty(U_0) = 0 = S(C_c^\infty(E|_{\sim \overline{U_1}})) \cap C_c^\infty(U_0).$$

Sei $\varphi \in C_c^\infty(U_0)$, $\varphi \geq 0$, mit $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* \varphi = 1$. Dies läßt sich wegen der Eigentlichkeit der Γ -Aktion immer erreichen, indem man eine Funktion mit geeignetem Träger wählt und entsprechend normiert. Es gilt dann $\varphi PD = \varphi + \varphi S$ auf $C_c^\infty(U_0)$, und die verschachtelten Umgebungen sind gerade so gewählt, daß wir φP und φS außerhalb von U_2 durch 0 glatt fortsetzen können.

Schließlich definiert $Q := \sum_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \varphi P U_\gamma^*$ eine globale Parametrix für D , da

$$\begin{aligned} QD &= \sum_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \varphi P D U_\gamma^* \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \varphi (\mathbb{I} + S) U_\gamma^* \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma^* \varphi \mathbb{I} + U_\gamma \varphi S U_\gamma^* \\ &= \mathbb{I} + T_1 \end{aligned}$$

³Gemeint ist ein offener Fundamentalbereich, d. h. $\mathcal{D} \cap \gamma \mathcal{D} = \emptyset$ für $\gamma \neq e$ und $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma \mathcal{D}} = X$.

mit $T_1 := \sum_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma \varphi S U_\gamma^*$. Nach Konstruktion sind T_1 und Q fastlokal, da sie aus jeweils nur „entlang der Diagonale“ verschobenen fastlokalen Operatoren aufgebaut sind, und T ist glättend als lokal endliche Summe glättender eigentlich getragener Operatoren. Eigentlich getragen (properly supported) heißt hier: Ist $K_S \in C^\infty(E \boxtimes E^*)$ der Integralkern von S und sind $\text{pr}_{1,2} : X \times X \rightarrow X$ die Projektionen auf den ersten und zweiten Faktor, so sind $\text{pr}_{1,2}|_{\text{supp} K_S}$ eigentliche Abbildungen. Ist $s \in C_c^\infty(E)$, so ist $T_1 s$ folglich durch eine lokal endliche Summe definiert. Daher sind die Summen stark konvergent, da P und S als Pseudodifferentialoperatoren negativer Ordnung beschränkt auf $L^2(E|_{U_2})$ sind.

Wie üblich sieht man, daß Q auch eine Rechtsparametrix ist, so daß $DQ = \mathbb{I} + T_2$ ist mit einem Glättungsoperator T_2 . 4.2.1

Für folgende Beweisidee siehe z. B. (Atiyah, 1976).

4.2.2 Korollar (wesentliche Selbstadjungiertheit)

Jeder symmetrische elliptische eichperiodische Operator D ist wesentlich selbstadjungiert auf $C_c^\infty(E)$.

Beweis Sei $s_0 \in \mathcal{D}(D^*) = \{w \in L^2(E) \mid D_{\text{dist}} w \in L^2(E)\}$, wobei D_{dist} den durch den Differentialoperator D auf den distributiven Schnitten definierten Operator bezeichnet. Wir haben dann zu zeigen, daß $s_0 \in \mathcal{D}(\bar{D})$ ist.

Glätten Da $\mathcal{D}(D) = C_c^\infty(E)$ dicht in $L^2(E)$ ist, können wir eine Folge $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(D)$ wählen mit $\lim_{j \rightarrow \infty} v_j = D^* s_0 =: v$. Wir setzen dann $w_j := Q v_j$, $j \in \mathbb{N}$. Da Q ein eigentlich getragener Pseudodifferentialoperator ist, ist $w_j \in C_c^\infty(E)$, $j \in \mathbb{N}$. Da Q beschränkt ist, konvergiert diese Folge, und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} w_j &= Q D s_0 = s_0 + T_1 s_0, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} D w_j &= \lim_{j \rightarrow \infty} (v_j + T_2 v_j) = v + T_2 v. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $s_0 + T_1 s_0 \in \mathcal{D}(\bar{D})$ ist. Es bleibt also zu zeigen, daß $s := T_1 s_0 \in \mathcal{D}(\bar{D})$ ist. Da T_1 glättend und fast lokal ist, ist $s \in C^\infty(E) \cap L^2(E)$, so daß wir im kompakten Fall fertig wären.

Abschneiden Wir benutzen eine Abschneidefunktion φ wie im Beweis von Lemma 4.2.1.

Weiterhin zählen wir Γ ab, so daß $\Gamma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\gamma_i\}$ ist, und setzen

$$\varphi_N := \sum_{i=1}^N \gamma_i^* \varphi,$$

so daß $(s_N := \varphi_N s)_{N \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(E)$ in $L^2(E)$ gegen s konvergiert. Wir haben nun noch $D s_N \rightarrow D^* s$ für $N \rightarrow \infty$ zu zeigen. Dazu wählen wir eine zweite Abschneidefunktion $\psi \in C_c^\infty(X)$ mit $\psi|_{\text{supp} \varphi} = 1$. Wegen der Elliptizität von D gibt es eine nur von D und φ abhängende Konstante C , so daß für jedes $w \in C^\infty(E)$ gilt:

$$\|D(\varphi w)\|^2 \leq C(\|\psi w\|^2 + \|\psi D w\|^2)$$

Für $w := U_\gamma s$ folgt dann

$$\begin{aligned}
 \|D((\gamma^* \varphi)s)\|^2 &= \|U_\gamma D((\gamma^* \varphi)s)\|^2 \\
 &= \|D(U_\gamma((\gamma^* \varphi)s))\|^2 \\
 &= \|D(\varphi U_\gamma s)\|^2 \\
 &\leq C(\|\psi U_\gamma s\|^2 + \|\psi D U_\gamma s\|^2) \\
 &= C(\|\gamma^* \psi s\|^2 + \|\gamma^* \psi D w\|^2)
 \end{aligned}$$

wegen der Unitarität von U_γ , so daß schließlich

$$\begin{aligned}
 \|Ds - Ds_N\|^2 &\leq C \sum_{j>N} (\|\gamma_j^* \psi s\|^2 + \|\gamma_j^* \psi D w\|^2) \\
 &\leq \tilde{C} \int_{X_N} (|s|^2 + |Ds|^2) d \operatorname{vol}_X
 \end{aligned}$$

mit $\tilde{C} := C \sup_{\gamma \in \Gamma} \sum |\gamma^* \psi|^2$ und $X_N := \bigcup_{j>N} \operatorname{supp} \gamma^* \psi$. Beide Summen sind wegen der Eigentlichkeit der Γ -Aktion endlich.

Ist nun $K \subset X$ kompakt, so schneidet K nur endlich viele Mengen der Form $\operatorname{supp} \gamma^* \psi$. Wählen wir N groß genug, so ist daher $K \cap X_N = \emptyset$. Da s und Ds in $L^2(E)$ sind, heißt dies, daß

$$\int_{X_N} (|s|^2 + |Ds|^2) d \operatorname{vol}_X < \varepsilon$$

ist für genügend großes N . Folglich ist

$$\|Ds - Ds_N\|^2 < \tilde{C} \varepsilon,$$

so daß $s \in \mathcal{D}(\bar{D})$ ist.

4.2.2

Ebenso analog zu (Brüning & Sunada, 1992b, 1996) kann man den Wärmeleitungskern konstruieren:

4.2.3 Theorem (Wärmeleitungskern)

Sei D ein symmetrischer, nach unten beschränkter elliptischer eichperiodischer Operator der Ordnung $p > d = \dim X$. Dann besitzt $e^{-t\bar{D}}$ für $t > 0$ einen glatten Integralkern $K_t(x, y) \in E_x \otimes E_y^*$, so daß

$$|K_t(x, y)| \leq C_1 t^{-d/p} \exp(-C_2 \operatorname{dist}(x, y)^{p/(p-1)} t^{-1/(p-1)}) \quad (4.2.1)$$

mit $C_1, C_2 > 0$, gleichmäßig auf $(0, T] \times X \times X$.

Beweisskizze

1. Über jeder lokal kompakten, zusammenhängenden, offenen Menge kann man aufgrund der Elliptizität von D eine Approximation F_t für e^{-tD} mit Rest $R_t := (\partial_t + D)\varphi F_t$ konstruieren.
2. Wie oben liften wir F_t und R_t mittels U_γ zu beschränkten Operatoren \tilde{F}_t und \tilde{R}_t auf $L^2(E)$, so daß $\tilde{R}_t = (\partial_t + D)\tilde{F}_t$ ist.
3. Die Neumannreihe $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\tilde{T} \star^j \tilde{R})_t$ liefert dann den Wärmeleitungsoperator e^{-tD} , wobei $(\tilde{T} \star^j \tilde{R})_0 = \tilde{T}_t$ und $(\tilde{T} \star^{j+1} \tilde{R})_t = \int_0^1 (\tilde{T} \star^j \tilde{R})_{t-u} R_u du$ ist.

4.2.3

4.3 Hilbertmoduloperatoren

Analog zu (Brüning & Sunada, 1992b) konstruieren wir zuerst eine Zerlegung von $L^2(E)$. Dazu wählen wir einen Fundamentalbereich \mathcal{D} für die Γ -Aktion, setzen $\mathcal{H} = L^2(E|_{\mathcal{D}})$ und definieren eine unitäre Abbildung durch

$$\begin{aligned}\Phi : L^2(E) &\rightarrow l^2(\Gamma, \mathcal{H}) \simeq l^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}, \\ \Phi(s)(\gamma) &= (U_\gamma(s))|_{\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

Für $f \in l^2(\Gamma) \otimes \mathcal{H}$ ist dann

$$\begin{aligned}(\Phi U_\gamma \Phi^* f)(\gamma') &= (U_{\gamma'} U_\gamma \Phi^* f)|_{\mathcal{D}} \\ &= \Theta(\gamma', \gamma) (U_{\gamma' \gamma} \Phi^* f)|_{\mathcal{D}} \\ &= \Theta(\gamma', \gamma) (\Phi \Phi^* f)(\gamma' \gamma) \\ &= \Theta(\gamma', \gamma) f(\gamma' \gamma) \\ &=: \Theta(\gamma', \gamma) R_\gamma f(\gamma')\end{aligned}$$

mit der Rechtstranslation R_γ .

Wir definieren daher versuchsweise eine $C_r^*(\Gamma, \Theta)$ -Aktion auf $L^2(E)$ durch

$$R_\gamma^\Theta(s) = U_\gamma(s)$$

für $s \in L^2(E)$. Dabei hängt der Kozyklus Θ allerdings im allgemeinen noch von $x \in X$ ab, so daß wir gezwungen sind, unsere Eichtranslationen innerhalb von $C(X, S^1) \times_{\alpha, \theta} \Gamma$ zu suchen. Diese C^* -Algebra hat zwar interessante strukturelle Eigenschaften, ist im Hinblick auf die Anwendung der Spektraltheorie des vorigen Abschnitts allerdings ungeeignet (siehe C.2.8 auf Seite 105).

Ist Θ periodisch, so können wir Γ auf X trivial operieren lassen. Wir erhalten dann ein Feld von getwisteten Gruppenalgebren $C_r^*(\Gamma, \Theta_x)$, $x \in M$ über M . Auch dieses Feld ist im allgemeinen noch „zu groß“.

Wir fordern daher im folgenden, daß der Kozyklus konstant in $x \in X$ ist, so daß wir es noch nur mit der getwisteten Gruppenalgebra $C_r^*(\Gamma, \Theta)$ zu tun haben. Bemerken wir nun, daß $l^2(\Gamma)$ der GNS-Darstellungsraum von $\mathcal{A} := C_r^*(\Gamma, \Theta)$ bezüglich der kanonischen Spur ist (siehe B.2.3 auf Seite 94) und daß $l^1(\Gamma) \subset C_r^*(\Gamma, \Theta) \subset l^2(\Gamma)$ ist, so liegt es nahe, den Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul⁴ $\mathcal{E} := \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$ zu betrachten, so daß $L^2(E)$ der Hilbert-GNS-Darstellungsraum von \mathcal{E} wird. Bei der Definition des Skalarprodukts lassen wir uns vom kommutativen Fall leiten (siehe 2.2.1 auf Seite 21).

4.3.1 Lemma (Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul)

Durch

$$\langle s_1 | s_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle U_{\gamma} s_2 | s_1 \rangle_{L^2(E)} R_{\gamma}^{\Theta} \quad (4.3.1)$$

für $s_1, s_2 \in C_c(E)$ wird auf $C_c(E)$ eine Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodulstruktur definiert, die unter Φ mit der Tensor-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodulstruktur von $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$ übereinstimmt.

Beweis Für $f_1, f_2 \in \mathcal{H}, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ ist nach Definition

$$\langle a_1 \otimes f_1 | a_2 \otimes f_2 \rangle_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}} = \langle f_2 | f_1 \rangle_{\mathcal{H}} a_1 a_2^*,$$

da ein Hilbert- \mathbb{C} -Linksmodul ein Hilbertraum mit vertauschtem Skalarprodukt ist. Für $s_1, s_2 \in C_c(E)$ ist dann, wenn wir $\delta_{\gamma^{-1}}$ mit $\bar{\Theta}(\gamma, \gamma^{-1}) R_{\gamma}^{\Theta}$ identifizieren,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(s_1) | \Phi(s_2) \rangle_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}} &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle \delta_{\gamma} \otimes \Phi(s_1)(\gamma) | \delta_{\gamma'} \otimes \Phi(s_2)(\gamma') \rangle_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}} \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle \Phi(s_2)(\gamma') | \Phi(s_1)(\gamma) \rangle_{\mathcal{H}} \bar{\Theta}(\gamma^{-1}, \gamma) \Theta(\gamma'^{-1}, \gamma') R_{\gamma^{-1}}^{\Theta} (R_{\gamma'^{-1}}^{\Theta})^* \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle \Phi(s_2)(\gamma') | \Phi(s_1)(\gamma) \rangle_{\mathcal{H}} \bar{\Theta}(\gamma^{-1}, \gamma) R_{\gamma^{-1}}^{\Theta} R_{\gamma'}^{\Theta} \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle (U_{\gamma'} s_2) |_{\mathcal{D}} | (U_{\gamma} s_1) |_{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{H}} \bar{\Theta}(\gamma^{-1}, \gamma) \Theta(\gamma^{-1}, \gamma') R_{\gamma^{-1} \gamma'}^{\Theta} \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle (U_{\gamma \gamma'} s_2) |_{\mathcal{D}} | (U_{\gamma} s_1) |_{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{H}} \bar{\Theta}(\gamma^{-1}, \gamma) \Theta(\gamma^{-1}, \gamma \gamma') R_{\gamma'}^{\Theta} \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle (U_{\gamma} U_{\gamma'} s_2) |_{\mathcal{D}} | (U_{\gamma} s_1) |_{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{H}} \Theta(\gamma, \gamma') \bar{\Theta}(\gamma^{-1}, \gamma) \Theta(\gamma^{-1}, \gamma \gamma') R_{\gamma'}^{\Theta} \\ &= \sum_{\gamma, \gamma' \in \Gamma} \langle (U_{\gamma} U_{\gamma'} s_2) |_{\mathcal{D}} | (U_{\gamma} s_1) |_{\mathcal{D}} \rangle_{\mathcal{H}} R_{\gamma'}^{\Theta} \\ &= \sum_{\gamma' \in \Gamma} \langle U_{\gamma'} s_2 | s_1 \rangle_{L^2(E)} R_{\gamma'}^{\Theta}, \end{aligned}$$

so daß die Strukturen übereinstimmen⁵.

4.3.1

⁴Die Aktion ist natürlicherweise als Linksaktion gegeben, da sie durch Endomorphismen auf einem Vektorraum definiert ist.

⁵Da wir s_1, s_2 mit kompaktem Träger vorausgesetzt haben und da die Γ -Aktion eigentlich ist, sind die auftretenden Summen lokal endlich.

4.3.2 Lemma (Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul)

Die Vervollständigung des Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmoduls $C_c(E)$ ist isomorph zu $\mathcal{E} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$. Die GNS-Darstellung von \mathcal{E} bezüglich der kanonischen Spur τ auf \mathcal{A} ist isomorph zu $L^2(E)$.

Beweis Nach (4.3.1) ist für $s \in C_c(E)$

$$\begin{aligned} \|s\|_{\mathcal{E}}^2 &= \|\langle s|s \rangle_{\mathcal{E}}\|_{\mathcal{A}} \\ &\geq \langle s|s \rangle_{L^2(E)}, \end{aligned}$$

so daß die Vervollständigung von $C_c(E)$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ in derjenigen bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(E)}$, also in $L^2(E)$ enthalten ist. Offensichtlich ist $C_c(E)$ dicht in \mathcal{E} .

Das Skalarprodukt in der GNS-Darstellung bezüglich τ berechnet sich für $s_1, s_2 \in C_c(E)$ gemäß

$$\begin{aligned} \langle s_1|s_2 \rangle_{\tau} &= \tau(\langle s_2|s_1 \rangle_{\mathcal{E}}) \\ &= \tau\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \langle U_{\gamma}s_1|s_2 \rangle_{L^2(E)} R_{\gamma}^{\Theta}\right) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle U_{\gamma}s_1|s_2 \rangle_{L^2(E)} \tau(\tilde{\rho}(\delta_{\gamma})) \\ &= \langle s_1|s_2 \rangle_{L^2(E)}. \end{aligned}$$

Da $C_c(E) \subset \mathcal{E} \subset L^2(E)$ dicht ist, folgt, daß der GNS-Darstellungsraum gerade $L^2(E)$ ist. \square

4.3.3 Lemma (\mathcal{A} -kompakte Operatoren)

Die \mathcal{A} -kompakten Operatoren auf \mathcal{E} sind gegeben durch

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{K}. \quad (4.3.2)$$

Hierbei sind \mathcal{K} die kompakten Operatoren auf $\mathcal{H} = L^2(E|_{\mathcal{D}})$ und \mathcal{A}^{op} ist die von den mit θ getwisteten Linkstranslationen erzeugte C^* -Algebra $C_r^*(\Gamma, \theta)^L$.

Beweis Zunächst gilt für Tensorprodukte von Hilbertlinksmoduln allgemein

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H}) &\simeq \mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{K}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}) \\ &\simeq \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Nach B.2.3 und B.2.4 auf Seite 95 ist dann schließlich $C_r^*(\Gamma, \theta)^{op} \simeq C_r^*(\Gamma, \theta)^L$. 4.3.3

Gemäß unseren allgemeinen Überlegungen in Kapitel 3 definieren wir eine Spur tr_{τ} und identifizieren beschränkte Moduloperatoren in $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ mit ihren Bildern in $\mathcal{L}(L^2(E))$ unter der treuen Darstellung bezüglich τ .

Wie in (Brüning & Sunada, 1992a, 1996) zeigt man unter Benutzung von Theorem 4.2.3 auf Seite 50:

4.3.4 Theorem (eichperiodische Operatoren)

Sei D ein symmetrischer eichperiodischer elliptischer Operator. Dann ist die Resolvente von \bar{D} \mathcal{A} -kompakt, und $e^{-t\bar{D}^2}$ ist tr_τ -Spurklasse.

4.3.5 Theorem (eichperiodische Moduloperatoren)

Sei D ein symmetrischer eichperiodischer elliptischer Operator. Dann definiert D einen \mathcal{A} -elliptischen Operator T , so daß die Resolventen von \bar{D} und \bar{T} (unter der GNS-Darstellung) übereinstimmen.

Beweis Wir setzen $\mathcal{D}(T) := \mathcal{D}(D) = C_c^\infty(E)$. Dann ist $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{E}$ dicht, wir setzen $T := D$ als Operatoren auf den Vektorräumen.

T ist adjungierbar, da D symmetrisch und eichperiodisch ist: Für $s_1, s_2 \in C_c^\infty(E)$ ist

$$\begin{aligned} \langle s_1 | D s_2 \rangle_{\mathcal{E}} &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle U_\gamma s_1 | D s_2 \rangle_{L^2(E)} R_\gamma^\theta \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle D U_\gamma s_1 | s_2 \rangle_{L^2(E)} R_\gamma^\theta \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle U_\gamma D s_1 | s_2 \rangle_{L^2(E)} R_\gamma^\theta \\ &= \langle D s_1 | s_2 \rangle_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

Schließlich ist $\text{ran}(1 + D^* D)$ schon dicht in $L^2(E)$, da D wesentlich selbstadjungiert ist; daher ist T regulär. \square

4.4 Spezialfälle

4.4.1 Beispiel (periodischer elliptischer Operator)

Ein eichperiodischer Operator heißt **periodisch**, falls der zugehörige Kozyklus $\Theta \equiv 1$ ist. In 6.2 auf Seite 72 beschäftigen wir uns mit der Spektraltheorie dieser Beispielklasse.

4.4.2 Beispiel (magnetischer Schrödingeroperator)

In Abschnitt 5.1 werden wir sehen, daß der magnetische Schrödingeroperator zu einem Magnetfeld $b \in \Omega^2(X)$, $db = 0$, $[\frac{1}{2\pi}b] \in H^2(X, \mathbb{Z})$, gegeben ist durch einen (symmetrischen elliptischen) Bochner-Laplace-Operator auf einem hermiteschen Linienbündel L über X . In Abschnitt 5.4 zeigen wir, daß dieser Operator bei periodischem Magnetfeld unter der Voraussetzung $H^1(X, S^1) = 0$ eichperiodisch ist mit möglicherweise nichtkonstantem Kozyklus. Ist b exakt, so kann ein konstanter Kozyklus gewählt werden. Ist der magnetische Fluß ganzzahlig ($b_M \in H^2(M, \mathbb{Z})$), so ist der Operator periodisch. Gibt es ein periodisches Potential a für $b = da$, so ist der Operator strikt periodisch und der magnetische Fluß 0.

Kapitel 5

Quantisierung mit Magnetfeld

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer wichtigen Klasse von Beispielen von eichperiodischen Operatoren, die aus der Physik kommt. Diese „magnetischen Schrödingeroperatoren“ ergeben sich bei der Quantisierung klassischer Systeme. „Quantisierung“ ist hier keine Abbildung eines klassischen auf ein quantenmechanisches System, sondern eine Relation zwischen beiden. Wir beschreiben einen Begriff von Äquivalenz von Quantisierungen (5.1) und stellen dar, wie alle Klassen von Quantisierungen eines Systems über einem kompakten Ortsraum als „Fasern“ der eindeutigen Quantisierung eines geeigneten Systems über einem nichtkompakten Ortsraum auftreten (5.2 und 5.3). Parallel dazu beschäftigen wir uns mit der Quantisierung mit periodischem Magnetfeld (5.3), die schließlich zu eichperiodischen elliptischen Operatoren führt (5.4).

Für eine ausführliche Darstellung der geometrischen Quantisierung sei auf das entsprechende Buch von Woodhouse (1991) verwiesen, für die garbentheoretischen Aspekte dabei auf die ersten Kapitel der Monographie von Brylinski (1993). Asch, Over & Seiler zeigen in ihrer Arbeit von 1994 den Zusammenhang zwischen Quantisierungsklassen und Fasern eines direkten Integrals für den 2-Torus.

5.1	Äquivalenzklassen von Quantisierungen	56
5.1.1	Bemerkung: minimale Kopplung	56
5.1.2	Definition: Quantisierung mit Magnetfeld	57
5.1.3	Bemerkung: Selbstadjungiertheit	58
5.1.4	Bemerkung: Äquivalenzklassen von Linienbündeln	58
5.1.5	Bemerkung: ganzzahlige de-Rham-Klasse	59
5.1.6	Bemerkung: Krümmung und Chernklasse	59
5.1.7	Theorem: Existenz von Quantisierungen	60
5.1.8	Definition: Äquivalenz von Quantisierungen	60
5.1.9	Bemerkung: unitäre Äquivalenz	60

5.1.10	Bemerkung: lokale Form der Umeichung	60
5.1.11	Bemerkung: 2-Term-Komplex	61
5.1.12	Theorem: Quantisierungsklassen	61
5.1.13	Theorem: Quantisierungsklassen bei festem Linienbündel	62
5.1.14	Definition: Jacobitorus	62
5.1.15	Definition: flache Linienbündel	62
5.1.16	Lemma: Klassen von flachen Linienbündeln	62
5.1.17	Theorem: Quantisierungsklassen	63
5.2	Zusammenhänge	63
5.2.1	Lemma: Jacobitorus	63
5.2.2	Lemma: Torsionstorus	64
5.2.3	Bemerkung: Torsionstorus	65
5.3	Periodische Magnetfelder	65
5.3.1	Theorem: periodischer magnetischer Schrödingeroperator	65
5.3.2	Theorem: direktes Integral	66
5.3.3	Korollar: Blochtheorie und Quantisierung	66
5.4	Eichperiodische magnetische Schrödingeroperatoren	67
5.4.1	Beispiel: strikt periodischer magnetischer Schrödingeroperator	67
5.4.2	Beispiel: exakte Magnetfeldform, $H^1(X) = 0$	67
5.4.3	Theorem: eichperiodischer magnetischer Schrödingeroperator	69

5.1 Äquivalenzklassen von Quantisierungen

5.1.1 Bemerkung (minimale Kopplung)

Bei der Einbeziehung der Lorentzkraft, die in den Newtongleichungen der klassischen Mechanik mit Magnetfeld $b \in C^\infty(T\mathbb{R}^3) \simeq \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ („axiale Vektorfelder“) auftritt, in den Formalismus der Lagrange- oder Hamiltonmechanik wird man mit der Notwendigkeit oder zumindest Nützlichkeit der Einführung eines Vektorpotentials $a \in C^\infty(T\mathbb{R}^3) \simeq \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ („polare Vektorfelder“) konfrontiert, so daß $b = da$ ist¹. Eine Hamiltonfunktion $h \in C^\infty(T\mathbb{R}^3)$ wird ersetzt durch $h_a: (x, p) \mapsto h(x, p - qa(x))$ (elektrische Ladung q), die **Hamiltonfunktion mit minimaler Kopplung**. Führt man dies für ein freies Teilchen ($h(x, p) = \frac{1}{2m}|p|^2$, Masse m) aus, so erhält man $h_a(x, p) = \frac{1}{2m}|p - qa(x)|^2$, was $H_a = \frac{1}{2m}(\frac{\hbar}{i}\nabla - a)^2$ als Hamiltonoperator in der quantenmechanischen Beschreibung nahelegt, wobei ∇ den Gradienten

¹ b ist divergenzfrei, i.e. geschlossen; da $H_{dR}^2(\mathbb{R}^3) = 0$ ist, ist b exakt

auf \mathbb{R}^3 bezeichnet. $\nabla - \frac{i}{\hbar}a$ kann als Zusammenhang auf dem trivialen komplexen Linienbündel $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$ aufgefaßt werden. Dabei ist besonders zu vermerken, daß die Krümmung $\text{curv}(\nabla - \frac{i}{\hbar}a) = \frac{1}{\hbar}da = \frac{1}{\hbar}b$ ist, wenn wir die Lie-Algebra von $U(1)$ mit \mathbb{R} geeignet identifizieren ($-iv \mapsto v \in \mathbb{R}$). Versucht man, ähnlich im Fall eines nichtexakten Magnetfeldes (auf einer Mannigfaltigkeit M mit nichttrivialem $H_{dR}^2(M)$) zu verfahren, so kann man im allgemeinen nur lokale Vektorpotentiale und Zusammenhänge auf lokal trivialen komplexen Linienbündeln finden. Wenn alles „schön zusammenpaßt“, dann erhalten wir einen globalen Zusammenhang auf einem (globalen) komplexen Linienbündel mit Krümmung $\frac{1}{\hbar}b$. Dies motiviert Definition 5.1.2.

Eine andere Betrachtungsweise für 5.1.2 ergibt sich aus Sicht der geometrischen Quantisierung. Sie beruht auf der Beobachtung, daß Hamiltonsche Mechanik mit (geschlossenem) Magnetfeld $b \in \Omega^2(M)$ auch ohne Verwendung eines magnetischen Vektorpotentials formuliert werden kann, wenn man eine „geladene“ symplektische Form $\omega_b = \omega + \tilde{b}$ auf $N := T^*M$ benutzt, wobei ω die kanonische symplektische Form auf T^*M und \tilde{b} der Rückzug π^*b von b von M nach T^*M mit der Projektion $\pi: T^*M \rightarrow M$ auf den Basispunkt ist. Eine Präquantisierung dieses Systems ist ein hermitesches Linienbündel \tilde{L} über T^*M mit Zusammenhang (kovarianter Ableitung) $\tilde{\nabla}$, so daß $\hbar \text{curv}(\tilde{\nabla}) = \omega_b$. Eine Quantisierung ist eine Präquantisierung zusammen mit einer komplexen Polarisierung² P von N . Da unsere symplektische Mannigfaltigkeit ein Kotangentenbündel ist, gibt es eine kanonische Polarisierung, gegeben durch die Faserung über M mit Faser $T_x M, x \in M$, die **vertikale Polarisierung**. Genauer: Die entsprechende Distribution ist $V_P = (\ker T\pi)_{\mathbb{C}}$. Polarisierte Schnitte in \tilde{L} bezüglich dieser Polarisierung können aufgefaßt werden als Schnitte eines komplexen Linienbündels L über M mit $\pi^*L = \tilde{L}$. Solch ein L existiert, da die Fasern von $\pi: T^*M \rightarrow M$ zusammenziehbar sind; L kann zum Beispiel als Rückzug mittels des Nullschnitts in T^*M konstruiert werden. Schließlich induziert $\tilde{\nabla}$ einen Zusammenhang ∇ auf L mit Krümmung b .

Im folgenden wählen wir Einheiten mit $\hbar = 1, q = 1, 2m = 1$.

5.1.2 Definition (Quantisierung mit Magnetfeld)

Sei (M, g) eine orientierbare riemannsche Mannigfaltigkeit, $b \in \Omega^2(M)$ eine geschlossene, reellwertige 2-Form (das **Magnetfeld**). Eine **Quantisierung** der Teilchenbewegung auf (M, g) unter dem Einfluß des Magnetfeldes b ist ein hermitesches Linienbündel über M mit Zusammenhang (L, h, ∇) , so daß $\text{curv}(\nabla) = b$. Der **magnetische Schrödingeroperator** ist definiert durch den **Bochner-Laplace-Operator**

$$H^{L, \nabla} := \nabla^* \nabla \text{ mit Definitionsbereich } \mathcal{D}(H^{L, \nabla}) = C_0^\infty(L) \quad (5.1.1)$$

² Eine komplexe Polarisierung auf $N = T^*M$ ist eine komplexe Distribution (d. h. eine Familie $(P_x)_{x \in N}$ von komplexen Unterräumen des komplexifizierten Tangentialraums $TN_{\mathbb{C}}$, die lokal durch glatte Rahmen definierbar ist) mit folgenden Eigenschaften:

1. Jedes P_x ist lagrangesch bezüglich der komplexifizierten symplektischen Struktur.
2. $\dim P \cap \bar{P} \cap TN$ ist konstant auf N .
3. P ist integrierbar, d. h. abgeschlossen unter der Bildung von Lieklammern.

im Hilbertraum $L^2(L)$ der quadratintegrierbaren Schnitte von L , der definiert ist durch g und h . Hier ist ∇^\dagger der zu ∇ formal adjungierte Differentialoperator.

5.1.3 Bemerkung (Selbstadjungiertheit)

Da $H^{L,\nabla}$ symmetrisch und nach unten beschränkt (durch 0) ist, hat H eine kanonische selbstadjungierte Erweiterung, die Friedrichserweiterung $H_F^{L,\nabla}$. Dies ist der selbstadjungierte Operator, der assoziiert ist zum Abschluß der symmetrischen Form

$$q(f, g) := (f, H^{L,\nabla} g) = (\nabla f, \nabla, g)$$

mit (Form-) Definitionsbereich $Q(q) = \mathcal{D}(H^{L,\nabla})$.

5.1.4 Bemerkung (Äquivalenzklassen von Linienbündeln)

Sei \underline{G}_M die Garbe der Keime von glatten Funktionen auf M mit Werten in G . Ein komplexes Linienbündel L über M ist definiert durch einen Čech-Kozyklus $(g_{\alpha\beta}) \in \check{Z}^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M^\times)$. Wählt man eine Kokette $(l_{\alpha\beta}) \in \check{C}^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M)$ mit $\exp 2\pi i l_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, so ist $\delta l \in \check{Z}^2(M, \underline{\mathbb{Z}}_M) = \check{Z}^2(M, \mathbb{Z})$, wobei δ das Čech-Kodifferential ist. Andere Wahlen l' erfüllen $l' - l \in \check{C}^1(M, \mathbb{Z})$, so daß δl und $\delta l'$ die gleiche Klasse in $\check{H}^2(M, \mathbb{Z})$ definieren, und die Abbildung

$$j: H^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M^\times) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}), g \mapsto \delta l$$

ist wohldefiniert.

Jeder Linienbündelisomorphismus von g nach g' korrespondiert mit einer Čech-Kokette $(f_\alpha) \in \check{C}^0(M, \underline{\mathbb{C}}_M^\times)$, $g' = g \delta f$.

$H^2(M, \mathbb{Z})$ parametrisiert gerade die Menge der Äquivalenzklassen von komplexen Linienbündeln: Die kurze exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}_M \xrightarrow{\exp 2\pi i \cdot} \underline{\mathbb{C}}_M^\times \rightarrow 0 \quad (5.1.2)$$

induziert folgende lange exakte Sequenz in der Čech-Kohomologie³:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(M, \underline{\mathbb{Z}}_M) & \rightarrow & H^0(M, \underline{\mathbb{C}}_M) & \rightarrow & H^0(M, \underline{\mathbb{C}}_M^\times) \rightarrow \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & H^1(M, \mathbb{Z}) & & 0 & & \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & H^2(M, \mathbb{Z}) & & 0 & & \end{array} \quad (5.1.3)$$

Daher ist $H^i(M, \underline{\mathbb{C}}_M^\times) \xrightarrow{j} H^{i+1}(M, \mathbb{Z})$ für $i \geq 1$, und der verbindende Homomorphismus j ist gerade die oben beschriebene Abbildung. Die Klasse in $H^2(M, \mathbb{Z})$, die L charakterisiert, heißt **erste Chernklasse** $c_1(L)$ von L .

³Eine feine Garbe ist azyklisch.

Ein hermitesches Linienbündel (L, h) ist definiert durch $(g_{\alpha\beta}) \in \check{Z}^1(M, \underline{S}_M^1)$, ein Isomorphismus hermitescher Linienbündel (i. e. eine Isometrie) durch $(f_\alpha) \in \check{C}^0(M, \underline{S}_M^1)$, $g' = g \delta f$. Mittels der kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}_M \xrightarrow{\exp 2\pi i \cdot} \underline{S}_M^1 \rightarrow 0 \quad (5.1.4)$$

und der entsprechenden langen exakten Sequenz in der Čech Kohomologie bekommt man wie vorher $H^i(M, \underline{S}_M^1) \xrightarrow{j} H^{i+1}(M, \underline{\mathbb{Z}})$ für $i \geq 1$, wobei j wiederum von der Abbildung $\delta \circ \frac{\log \cdot}{2\pi i}$ auf den Koketten kommt.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß die von den Koeffizientengruppen induzierte Gruppenstruktur von $H^1(M, \underline{\mathbb{C}}_M^\times)$ und $H^1(M, \underline{S}_M^1)$ gerade dem Tensorprodukt von Linienbündeln entspricht.

5.1.5 Bemerkung (ganzzahlige de-Rham-Klasse)

Die kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp 2\pi i \cdot} S^1 \rightarrow 0 \quad (5.1.5)$$

induziert eine lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^0(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H^0(i)} & H^0(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & H^0(M, S^1) & \rightarrow & \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & & & 0 \\ & & \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H^1(i)} & H^1(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & H^1(M, S^1) \rightarrow \\ & & \nearrow & & & & \\ 0 & & & & & & \\ & \xrightarrow{i} & H^2(M, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{H^2(i)} & H^2(M, \mathbb{R}) & \rightarrow & \dots \end{array} \quad (5.1.6)$$

Eine de-Rham-Klasse heißt **ganzzahlig**, wenn sie im Bild von $H^*(i)$ liegt.

5.1.6 Bemerkung (Krümmung und Chernklasse)

Für ein Linienbündel mit Zusammenhang gilt $H^*(i)(c_1(L)) = [-\frac{1}{2\pi} \text{curv}(\nabla)]$ nach der anfangs erwähnten Identifizierung $-i\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$. Dies läßt sich zum Beispiel durch den Zugang über die Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{R}(2) := (2\pi i)^2 \mathbb{R}$ sehen (siehe Brylinski, 1993, Kap. 1 für die nötigen Begriffe): Sei $\mu = \delta\left(\frac{\log g}{2\pi i}\right) \in \check{Z}^2(M, \mathbb{Z})$ wie in 5.1.4 auf der anderen Seite ein Repräsentant von $c_1(L)$ für eine Wahl von Logarithmen $\log_{\alpha\beta}$. Dies definiert einen Kozyklus in $\check{Z}^2(M, \mathbb{R}(2)_D^\infty)$ durch $(-(2\pi i)^2 \mu, -2\pi i \log g, -2\pi a)$, und nach einem Satz über die

Deligne-Kohomologiegruppen $H^p(M, \mathbb{R}(p)_D^\infty)$ (a. a. O., Lemma 1.5.4) ist $-(2\pi i)^2 H^*(i)([\mu]) = -2\pi[da] \in H^2(M, \mathbb{R})$ unter dem Čech-de-Rham-Isomorphismus.

Aus diesem Zusammenhang von Krümmung und Chernklasse folgt unmittelbar

5.1.7 Theorem (Existenz von Quantisierungen)

Ein System mit Magnetfeld (M, g, b) ist quantisierbar genau dann, wenn die de-Rham-Klasse von $\frac{1}{2\pi}b$ ganzzahlig ist.

5.1.8 Definition (Äquivalenz von Quantisierungen)

Zwei Quantisierungen (L, h, ∇) und (L', h', ∇') heißen **äquivalent**, falls es einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus $\Phi: L \rightarrow L'$ gibt, der die Zusammenhänge vertauscht:

$$\forall s \in C^\infty(L) \quad \forall X \in C^\infty(TM) \quad \Phi \circ \nabla_X s = \nabla'_X (\Phi \circ s) \quad (5.1.7)$$

5.1.9 Bemerkung (unitäre Äquivalenz)

Sind (L, h, ∇) und (L', h', ∇') zwei via Φ äquivalente Quantisierungen, so definiert

$$U_\Phi: L^2(L) \rightarrow L^2(L'), \\ s \mapsto U_\Phi s := \Phi \circ s$$

eine unitäre Abbildung, so daß

$$U_\Phi H^{L, \nabla} = H^{L', \nabla'} U_\Phi$$

ist.

5.1.10 Bemerkung (lokale Form der Umeichung)

Wir wählen eine Kokette $f \in \check{C}^0(M, \underline{S}_M^1)$ als Repräsentant für den Isomorphismus Φ von oben, i. e. $\varphi'_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1} = \text{id}_M \times f_\alpha$, und Kozykel (g, a) und (g', a') für (L, h, ∇) und (L', h', ∇') bezüglich Bündelkarten $\varphi_\alpha: L|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$ und $\varphi'_\alpha: L'|_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}$. Sei $e_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\cdot, 1)$ der Schnitt von $L|_{U_\alpha}$, der zur Trivialisierung φ_α , $s|_{U_\alpha} = s_\alpha e_\alpha$ gehört; die Übergangsfunktionen sind $\text{id}_M \times g_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha &= \varphi'_\alpha \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \Phi^{-1} \\ &= (\text{id}_M \times f_\alpha) \circ \varphi_\alpha \circ \Phi^{-1}, \\ \text{id}_M \times g'_{\alpha\beta} &= \varphi'_\alpha \circ \varphi'_\beta^{-1} \\ &= (\text{id}_M \times f_\alpha) \circ \varphi_\alpha \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ \varphi_\beta^{-1} \circ (\text{id}_M \times f_\beta^{-1}) \\ &= \text{id}_M \times (f_\alpha g_{\alpha\beta} f_\beta^{-1}) \\ &= (g\delta f)_{\alpha\beta}, \\ s'_\alpha e'_\alpha &:= \Phi \circ (s_\alpha e_\alpha). \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

In dieser Notation liest sich (5.1.7) wie folgt:

$$f_\alpha(ds_\alpha(X) - \iota s_\alpha a_\alpha(X))e_\alpha = (ds'_\alpha(X) - \iota s'_\alpha a'_\alpha(X))e'_\alpha, \quad (5.1.9)$$

und

$$\begin{aligned} e'_\alpha &= \varphi'^{-1}_\alpha(\cdot, 1) \\ &= \Phi \circ \varphi^{-1}_\alpha \circ (\text{id}_M \times f_\alpha)^{-1}(\cdot, 1) \\ &= f_\alpha^{-1} \Phi \circ e_\alpha \end{aligned}$$

und daher

$$s'_\alpha = f_\alpha s_\alpha$$

wegen (5.1.8).

$$s'_\alpha e'_\alpha = \Phi \circ (s_\alpha e_\alpha).$$

Somit wird (5.1.9) zu

$$f_\alpha(ds_\alpha(X) - s_\alpha \iota a_\alpha(X))e_\alpha = (f_\alpha ds_\alpha(X) + s_\alpha df_\alpha(X) - \iota f_\alpha s_\alpha a'_\alpha(X))e_\alpha,$$

also

$$\iota(a'_\alpha - a_\alpha) = f_\alpha^{-1} df_\alpha = d \log f_\alpha. \quad (5.1.10)$$

5.1.11 Bemerkung (2-Term-Komplex)

Die „zweite Hälfte“ der Bedingung für den Deligne-Kozyklus in Bemerkung 5.1.6 auf Seite 59, also $-\iota(\delta a)_{\alpha\beta} = -d \log g_{\alpha\beta}$, läßt sich auch in Form eines 2-Term-Garbenkomplexes

$$K := \begin{cases} K^0 := \underline{S}^1_M \\ \downarrow \text{id} \log \\ K^1 := \underline{\Omega}^1_M \end{cases} \quad (5.1.11)$$

darstellen, wobei $\underline{\Omega}^1_M$ die Garbe der (reellen) 1-Formen auf M bezeichnet. $(g, -a)$ definiert dann einen Kozyklus und damit eine Klasse in der Hyperkohomologie $H^1(M, K)$ von K ; in (Brylinski, 1993, Kapitel 2) wird gezeigt, daß diese Klasse unabhängig von der Wahl des Linienbündel-Kozyklus $g_{\alpha\beta}$ und der Zusammenhangsformen a_α ist und die Isomorphieklassen von Linienbündeln mit Zusammenhängen parametrisiert:

5.1.12 Theorem (Quantisierungsklassen)

Die Menge der Isomorphieklassen von hermiteschen Linienbündeln mit Zusammenhängen über einer gegebenen riemannschen Mannigfaltigkeit M ist gerade die Hyperkohomologiegruppe $H^1(M, K)$ des Garbenkomplexes K (5.1.11).

Da wir aber nach Quantisierungen für ein vorgegebenes Magnetfeld suchen, beschäftigen wir uns hier ausführlicher mit den entsprechenden Isomorphieklassen für festes L und festes b :

5.1.13 Theorem (Quantisierungsklassen bei festem Linienbündel)

Sei (M, g, b) ein quantisierbares System mit Magnetfeld und L ein komplexes Linienbündel über M mit $H^*(i)(c_1(L)) = [-\frac{1}{2\pi}b]$. Dann ist die Menge der Äquivalenzklassen von Quantisierungen (L, h, ∇) von (M, g, b) für festes (L, h) gerade $H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$.

Beweis Die Menge der hermiteschen Zusammenhänge ist parametrisiert durch $\Omega^1(M)$, da sich zwei hermitesche Zusammenhänge um eine imaginäre 1-Form $-i\eta$ unterscheiden. Wegen $\text{curv}(\nabla) = \text{curv}(\nabla - i\eta) = \text{curv}(\nabla) + d\eta$ ist $d\eta = 0$, daher ist $\eta = dk_\alpha$ für einen geeigneten Bündelatlas und $k_\alpha \in \check{C}^0(M, \mathbb{R})$. Zwei Quantisierungen (L, h, ∇) und $(L, h, \nabla' = \nabla + i\eta)$ sind äquivalent genau dann, wenn es einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus gibt mit

$$\iota(a'_\alpha - a_\alpha) = f_\alpha^{-1} df_\alpha$$

nach (5.1.10). Daher ist $\eta = a' - a = -id \log f$. Mit dem Bockstein-Homomorphismus $j = \delta \circ \frac{\log}{2\pi i} : H^0(M, \underline{S}_M^1) \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z})$ gilt andererseits

$$g' = g\delta f = g \Leftrightarrow \delta f = 1 \Rightarrow j([f]) \in H^1(M, \mathbb{Z}),$$

und umgekehrt gibt es solch ein f genau dann, wenn η ganzzahlig ist, d. h. die Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{1, \text{geschl.}}(M)/\sim \rightarrow 0$$

ist exakt, wobei zwei geschlossene 1-Formen η_1, η_2 äquivalent („ \sim “) heißen, wenn die Zusammenhänge $\nabla - i\eta_1$ und $\nabla - i\eta_2$ äquivalent sind. \square

5.1.14 Definition (Jacobitorus)

$J(M) := H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z})$ heißt **Jacobitorus** von M . Die Metrik auf M induziert durch

$$(\eta, \omega) := \int_M \eta \wedge * \omega$$

eine Metrik auf $H^1(M, \mathbb{R})$ und auf $H^1(M, \mathbb{Z})$. $J(M)$ trägt die Quotiententopologie.

5.1.15 Definition (flache Linienbündel)

Ein Linienbündel heißt **flach**, wenn es einen Bündelatlas mit lokal konstanten Übergangsfunktionen gibt.

5.1.16 Lemma (Klassen von flachen Linienbündeln)

Die Gruppe (bzgl. Tensorprodukt) der Klassen von flachen Linienbündeln über einer Mannigfaltigkeit M ist isomorph zu $H^1(M, S^1)$.

Beweis Flache Linienbündel sind genau die lokal konstanten Linienbündel. Deswegen ist ein Linienbündelkozyklus ein Čech-1-Kozyklus mit Werten in den lokal konstanten S^1 -wertigen Funktionen. Čech-Koränder sind genau Isomorphismen flacher Linienbündel, so daß die Menge der Klassen flacher Linienbündel mit der Menge der Klassen von Čech-1-Kozykeln korrespondiert. Schließlich ist der Kozyklus eines Tensorprodukts das Produkt der Kozyklen der Faktoren. 5.1.16

5.1.17 Theorem (Quantisierungsklassen)

Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit quantisierbarem Magnetfeld b korrespondiert die Menge der Äquivalenzklassen von Quantisierungen (L, h, ∇) mit $H^1(M, S^1)$.

Beweis Für eine feste Wahl (L_1, h_1, ∇_1) einer Quantisierung ist jede weitere Quantisierung (L_2, h_2, ∇_2) modulo Äquivalenz gegeben durch

$$\begin{aligned} (L_2, h_2, \nabla_2) &\simeq (L_1 \otimes L_{12}, h_1 \otimes h_{12}, \nabla_1 \otimes \mathbb{I}_{L_{12}} + \mathbb{I}_{L_1} \otimes \nabla_{12}) \text{ mit} \\ L_{12} &= L_1^* \otimes L_2, \\ h_{12} &= \overline{h_1} \otimes h_2, \\ \nabla_{12} &= \nabla_1^* \otimes \mathbb{I}_{L_2} + \mathbb{I}_{L_1^*} \otimes \nabla_2. \end{aligned}$$

Daher gibt die Charakterisierung flacher Linienbündel nach 5.1.16 auf der anderen Seite die Menge der Quantisierungsklassen. \square

5.2 Zusammenhänge

Wir identifizieren nun den Jacobitorus mit der Zusammenhangskomponente der Eins in der Gruppe der eindimensionalen unitären Darstellungen der Fundamentalgruppe von M :

5.2.1 Lemma (Jacobitorus)

$$H^1(M, \mathbb{R})/H^1(M, \mathbb{Z}) \simeq (\pi_1(\widehat{M}))_0 \quad (5.2.1)$$

Beweis Für jede parakompakte Mannigfaltigkeit ist $H := H_1(M, \mathbb{Z})$ die Abelsierung von $\Gamma := \pi_1(M)$, somit folgt $\hat{H} = \hat{\Gamma}$. Wie in Katsuda & Sunada (1987) definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega^{1, \text{geschl.}}(M) \ni \omega &\mapsto \chi_\omega \in \hat{H} \\ \chi_\omega(\gamma) &:= \exp \left(2\pi i \int_{c(\gamma)} \omega \right) \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

für einen geschlossenen Weg $c(\gamma)$, der die Klasse γ repräsentiert. Verschiedene Repräsentanten ergeben dasselbe Integral, da ω geschlossen ist. Auf exakten Formen verschwindet

das Integral über einen geschlossenen Weg, daher erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$H^1(M, \mathbb{R}) \ni [\omega] \mapsto \chi_\omega \in \hat{H}. \quad (5.2.3)$$

Wegen $\chi_\omega(\gamma)\chi_{\omega'}(\gamma) = \chi_{\omega+\omega'}(\gamma)$ ist diese Abbildung ein Gruppenhomomorphismus, im Kern sind gerade die (Klassen von) geschlossenen 1-Formen ω , für die $\int_c \omega$ ganzzahlig ist für alle geschlossenen Wege c , also gerade die (Klassen von) ganzzahligen 1-Formen.

Die Zuordnung (5.2.2) ist stetig für jedes γ und definiert daher eine stetige Abbildung nach \hat{H} . Da $H^1(M, \mathbb{R})$ als Vektorraum zusammenhängend ist, ist der Bildbereich von (5.2.3) zusammenhängend und enthält den trivialen Charakter als Bild der Nullklasse. 5.2.1

5.2.2 Lemma (Torsionstorus)

Der Isomorphismus

$$\pi_1(\widehat{M}) \simeq H^1(M, S^1) \quad (5.2.4)$$

ist geometrisch realisierbar durch die Assoziierung flacher Linienbündel:

$$\chi \mapsto F_\chi = \tilde{M} \times_\chi \mathbb{C} \quad (5.2.5)$$

Beweis Die Gleichheit selbst folgt schon aus dem universellen Koeffiziententheorem (siehe z.B. Bott & Tu, 1995, Kapitel 15)

$$H^1(M, S^1) = \text{Hom}(H_1(M, \mathbb{Z}), S^1) \oplus \text{Ext}(H_0(M, \mathbb{Z}), S^1),$$

da $H_0(M, \mathbb{Z})$ frei ist ($\Rightarrow \text{Ext}(H_0(M, \mathbb{Z}), S^1)$ trivial) und $\pi_1(M)$ dieselben eindimensionalen Darstellungen besitzt wie seine Abelsierung $H_1(M, \mathbb{Z})$.

$H^1(M, S^1)$ ist nach 5.1.16 auf Seite 62 die Menge der Klassen flacher Linienbündel bezüglich „flacher Äquivalenz“. Andererseits sind flache Vektorraumbündel bekanntlicherweise gerade die zu einer Darstellung der Fundamentalgruppe assoziierten. Flache Linienbündel entsprechen somit gerade den zu einer eindimensionalen Darstellung der Fundamentalgruppe assoziierten Bündeln:

$$H^1(M, S^1) \simeq \{\tilde{M} \times_\chi \mathbb{C} \mid \chi \in \pi_1(\widehat{M})\} / \sim$$

Auf $\tilde{M} \times_\chi \mathbb{C}$ ist der natürliche flache Zusammenhang gegeben durch Einschränkung des kanonischen Zusammenhangs d des trivialen Bündels $\tilde{M} \times \mathbb{C}$.

Umgekehrt erhält man bei gegebenem flachem Linienbündel den Charakter χ zurück als Holonomie des Zusammenhangs entlang geschlossener Kurven⁴. Da die Zusammenhangsformen unter flacher Äquivalenz invariant sind, liefert die Holonomie eine wohldefinierte Abbildung von $H^1(M, S^1)$ nach $\pi_1(\widehat{M})$, die offensichtlich eine Inverse der Abbildung „Assoziierung zu \tilde{M} “ ist. 5.2.2

⁴Für einen flachen Zusammenhang auf einem komplexen Linienbündel L hängt der Paralleltransport entlang einer Kurve nur von der Homotopieklasse der Kurve ab und definiert daher eine unitäre Darstellung ρ von $\pi_1(M)$. Der Paralleltransport liefert einen Linienbündelisomorphismus $L \simeq \tilde{M} \times_\rho \mathbb{C}$.

5.2.3 Bemerkung (Torsionstorus)

Nach 5.2.1 auf Seite 63 ist der Jacobitorus gerade $(\pi_1(\widehat{M}))_0$. Zerlegt man Γ in einen freien (endlich erzeugten) und einen (endlichen) Torsionsanteil, so sieht man, daß die Charaktere in $(\pi_1(\widehat{M}))_0$ gerade die auf dem Torsionsanteil verschwindenden sind. Der Abschnitt

$$0 \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{H^1(i)} H^1(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{H^1(\exp 2\pi i \cdot)} H^1(M, S^1)$$

aus der exakten Sequenz (5.1·6) zeigt, daß der Jacobitorus injektiv in $H^1(M, S^1)$ eingebettet ist und selbst keine Torsionselemente enthält. Daher ist $H^1(M, S^1)$ die „torsive Version“ des Jacobitorus, was die Bezeichnung motiviert.

5.3 Periodische Magnetfelder

Wie in Kapitel 4 setzen wir nun die Existenz einer freien, isometrischen, eigentlich unstetigen, kokompakten Aktion einer diskreten Gruppe Γ auf der riemannschen Mannigfaltigkeit X voraus, $M := \Gamma \backslash X$. Darüberhinaus sei $b \in \Omega^2(X)$ ein quantisierbares periodisches Magnetfeld, also

$$\begin{aligned} db &= 0, \\ \left[\frac{1}{2\pi} b \right] &\in H^*(i)(H^2(X, \mathbb{Z})) \subset H^2(X, \mathbb{R}), \\ b &= \pi^* b_M \text{ für ein } b_M \in \Omega^2(M), \end{aligned}$$

wobei

$$\pi : X \rightarrow M$$

die Projektion ist. Dabei ist zu beachten, daß $\frac{1}{2\pi} b_M$ nicht automatisch ganzzahlig ist: Für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit X bedeutet die Ganzzahligkeit von $\frac{1}{2\pi} b_M$ gerade die Ganzzahligkeit des magnetischen Flusses $\int_M b_M$ durch eine Elementarzelle des Gitters, wogegen $\frac{1}{2\pi} b$ selbst automatisch ganzzahlig ist, falls z. B. $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$.

5.3.1 Theorem (periodischer magnetischer Schrödingeroperator)

Ist neben den obigen Voraussetzungen zusätzlich $\frac{1}{2\pi} b_M$ ganzzahlig, so gibt es eine zugehörige Quantisierung (L, h, ∇) derart, daß der entsprechende magnetische Schrödingeroperator $H^{L, \nabla}$ Γ -periodisch ist.

Beweis Ist $\frac{1}{2\pi} b_M$ ganzzahlig, so gibt es nach 5.1.7 auf Seite 60 ein hermitesches Linienbündel L' über M mit Zusammenhang ∇' , so daß $\text{curv}(\nabla') = b_M$. L' und ∇' lassen sich vermittels π von M nach X zurückziehen zu einem Linienbündel $L = \pi^* L'$ über X mit Zusammenhang ∇ und Krümmung b . Die Γ -Aktion auf X induziert eine Γ -Aktion auf L . Als Lift unter π ist ∇ automatisch Γ -periodisch, da eine endliche Überdeckung von M wegen der Eigentlichkeit der Γ -Aktion eine lokal endliche Überdeckung von X mit Γ -invarianten offenen Mengen induziert und die Zusammenhangsformen einfach von M nach X zurückgezogen werden können. \square

Üblicherweise wird man zu diesem Schrödingeroperator noch ein glattes, periodisches Potential addieren. Der entstehende Operator ist periodisch und elliptisch, somit sind alle entsprechenden Methoden anwendbar (siehe 6.2 auf Seite 72). Insbesondere ist $H^{L,\nabla}$ wesentlich selbstadjungiert. Ist Γ abelsch, so haben wir darüberhinaus die Blochzerlegung zur Verfügung (cf. 2.1 auf Seite 12):

5.3.2 Theorem (direktes Integral)

Für abelsches Γ sind die Fasern von $\overline{H^{L,\nabla}}$ gegeben durch

$$\left(\overline{H^{L,\nabla}}\right)_\chi = \overline{H_\chi^{L,\nabla}} \text{ mit} \quad (5.3.1)$$

$$\mathcal{D}(H_\chi^{L,\nabla}) = C^\infty(L_\chi) = C^\infty(L)^{\Gamma,\chi}, \quad (5.3.2)$$

$$L_\chi = L' \otimes F_\chi, \quad (5.3.3)$$

$$H_\chi^{L,\nabla} = H^{L,\nabla}|_{C^\infty(L)^{\Gamma,\chi}} \quad (5.3.4)$$

$$= H^{L_\chi,\nabla_\chi}, \quad (5.3.5)$$

wobei

$$\nabla_\chi = (\nabla' \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes d)|_{C^\infty(L)^{\Gamma,\chi}} \quad (5.3.6)$$

Mit anderen Worten: Jede Faser des magnetischen Schrödingeroperators $H^{L,\nabla}$ ist ein magnetischer Schrödingeroperator H^{L_χ,∇_χ} .

Beweis Nach 2.1.16 auf Seite 20 ist $H^{L,\nabla}$ zerlegbar, und die Gleichungen (5.3.1)–(5.3.4) folgen unmittelbar. Gleichung (5.3.5) folgt für $\chi = 1$ schon aus der Leibnizregel für Zusammenhänge, da dann $F_\chi = M \times \mathbb{C}$ ist. Für alle χ definiert (5.3.6), wie wir im Beweis von 5.2.2 auf Seite 64 gesehen haben, einen Zusammenhang für die durch χ charakterisierte Quantisierungs-klasse nach 5.1.17. Darüberhinaus zeigt die konkrete Form, daß

$$\nabla|_{C^\infty(L)^{\Gamma,\chi}} = \nabla_\chi$$

ist, da ∇_χ nicht explizit von χ abhängt. Somit folgt auch

$$H^{L,\nabla}|_{C^\infty(L)^{\Gamma,\chi}} = H^{L_\chi,\nabla_\chi}$$

und damit wegen (5.3.4) die gewünschte Gleichheit. 5.3.2

5.3.3 Korollar (Blochtheorie und Quantisierung)

Sei (M, g, b) ein quantisierbares System mit Magnetfeld über einer kompakten Mannigfaltigkeit M . Dann ist das entsprechende System $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{b})$ auf der universellen Überlagerung eindeutig quantisierbar. Ist $\Gamma := \pi_1(M)$ abelsch, so ist der magnetische Schrödingeroperator $H^{\tilde{L},\tilde{\nabla}}$ auf $L^2(\tilde{M})$ zerlegbar über $\hat{\Gamma}$, und als Fasern treten genau die Äquivalenzklassen von Quantisierungen von (M, g, b) auf:

$$\overline{H^{\tilde{L},\tilde{\nabla}}} = \int_{\pi_1(M)}^{\oplus} \overline{H^{L_\chi,\nabla_\chi}} d\chi \quad (5.3.7)$$

„eindeutige Quantisierung oben“ = „Summe über alle Quantisierungen unten“

Beweis Das System $(\tilde{M}, \tilde{g}, \tilde{b})$ ist nach Konstruktion periodisch und quantisierbar. Da offensichtlich $H^1(\tilde{M}, S^1) = \{1\}$ ist, ist die Quantisierung bis auf Äquivalenz eindeutig. Für abelsches Γ können wir 5.3.2 anwenden, woraus zusammen mit 5.1.17 alles wie gewünscht folgt. 5.3.3

5.4 Eichperiodische magnetische Schrödingeroperatoren

Wir bleiben in der Situation der auf dem quantisierbaren Magnetfelder wie in Abschnitt 5.3 auf Seite 65:

5.4.1 Beispiel (strikt periodischer magnetischer Schrödingeroperator)

Theorem 5.3.1 auf Seite 65 zeigt, daß zu einem periodischen Magnetfeld $b \in \Omega^2(X)$ mit $[\frac{1}{2\pi}b_M] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ eine Quantisierung (L, h, ∇) existiert, die ein Lift einer geeigneten Quantisierung (L', h', ∇') von (M, b_M) ist, so daß der magnetische Schrödingeroperator auf L periodisch ist. Ist M zweidimensional, so ist insbesondere $\int_M b_M \in 2\pi\mathbb{Z}$, der magnetische Fluß durch eine Elementarzelle ist also ganzzahlig.

Der magnetische Schrödingeroperator ist strikt periodisch im Sinne von Definition 6.2.1 auf Seite 72 genau dann, wenn es eine Quantisierung der Form $(X \times \mathbb{C}, h, \nabla)$ gibt, was wir daher auch als Definition für strikte Periodizität des magnetischen Schrödingeroperators ansehen können. Diese ist genau dann gegeben, wenn $L' = M \times \mathbb{C}$, also genau dann, wenn die Chernklasse $c_1(L') = 0$ ist. Insbesondere ist dann $0 = [b_M] \in H^2(M, \mathbb{R})$, und umgekehrt gibt es solch ein L' genau in diesem Fall. Weiterhin ist $[b_M] = 0$ genau dann, wenn es ein $a_M \in \Omega_1(M)$ gibt mit $db_M = a_M$, wenn es also ein periodisches Potential $a = \pi^* a_M$ für b gibt. Ist M zweidimensional, so folgt $\int_M b_M = \int_M da_M = 0$, der magnetische Fluß durch eine Elementarzelle verschwindet daher.

Wir verlangen nun nur die Quantisierbarkeit von $\frac{1}{2\pi}b$, nicht die von $\frac{1}{2\pi}b_M$. Dann können wir das System nicht mehr auf dem Quotienten $M = \Gamma \backslash X$ quantisieren. Wir untersuchen zunächst ein weiteres

5.4.2 Beispiel (exakte Magnetfeldform, $H^1(X) = 0$)

Sei $a \in \Omega^1(X)$ ein Potential zum Magnetfeld $b = da \in \Omega^2(X)$, $V \in C^\infty(X)$. Gemäß Abschnitt 5.1 ist der zugehörige magnetische Schrödingeroperator

$$H^{X \times \mathbb{C}, \nabla^a} = (\nabla^a)^\dagger \nabla^a \text{ auf } \mathcal{D}(H^{X \times \mathbb{C}, \nabla^a}) = C_c^\infty(X), \text{ wobei} \quad (5.4.1)$$

$$\nabla^a = d - \iota a \quad (5.4.2)$$

auf dem trivialen Linienbündel $X \times \mathbb{C}$. Wir setzen für ein festes $x_0 \in X$

$$\chi_\gamma(x) := \int_{x_0}^x (a - \gamma^* a).$$

Dies ist wohldefiniert, da nach Voraussetzung $H^1(X) = 0$ und $d(a - \gamma^*a) = b - \gamma^*b = 0$ ist. Es wird dann

$$d\chi_\gamma = a - \gamma^*a,$$

und mit $s_\gamma := e^{i\chi_\gamma}$ ist

$$\begin{aligned} (d - i\alpha)(s_\gamma \gamma^* f) &= s_\gamma \gamma^* df + i(a - \gamma^*a)s_\gamma \gamma^* f - i\alpha s_\gamma \gamma^* f \\ &= s_\gamma \gamma^* df - i\gamma^*a \gamma^* f \\ &= s_\gamma \gamma^* df - i s_\gamma \gamma^*(af) \\ &= s_\gamma \gamma^*((d - i\alpha)f). \end{aligned}$$

Wir haben daher explizit die magnetischen Translationen

$$\begin{aligned} U_\gamma : C^\infty(X) &\rightarrow C^\infty(X), \\ (U_\gamma s)(x) &= s_\gamma(x)(\gamma^*s)(x) \end{aligned}$$

konstruiert, die $H^{X \times \mathbb{C}, \nabla^a}$ zu einem eichperiodischen Operator im Sinne von 4.1.4 auf Seite 45 machen, da

$$\begin{aligned} (U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} s)(x) &= s_{\gamma_1}(x) s_{\gamma_2}(\gamma_1^{-1}x) s(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= \exp \left(i \left(\int_{x_0}^x a - \gamma_1^*a + \int_{x_0}^{\gamma_1^{-1}x} a - \gamma_2^*a \right) \right) s(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= \exp \left(i \left(\int_{x_0}^x a - \gamma_1^*a + \int_{\gamma_1 x_0}^x \gamma_1^*a - (\gamma_1 \gamma_2)^*a \right) \right) s(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= \exp \left(i \left(\int_{x_0}^{\gamma_1 x_0} (\gamma_1 \gamma_2)^*a - \gamma_1^*a + \int_{x_0}^x a - (\gamma_1 \gamma_2)^*a \right) \right) s(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= \exp \left(i \left(\int_{x_0}^{\gamma_1 x_0} (\gamma_1 \gamma_2)^*a - \gamma_1^*a \right) \right) s_{\gamma_1 \gamma_2}(x) s(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &=: \Theta(\gamma_1, \gamma_2) s_{\gamma_1 \gamma_2}(x) s(\gamma_2^{-1} \gamma_1^{-1}x) \\ &= \Theta(\gamma_1, \gamma_2) (U_{\gamma_1 \gamma_2} s)(x) \end{aligned}$$

mit $\Theta(\gamma_1, \gamma_2) \in S^1$.

Ist a periodisch, so ist offensichtlich $\chi_\gamma = 0$, $\gamma \in \Gamma$, und wir sind im strikt periodischen Fall.

Für nichtexaktes b können wir uns nicht auf triviale Bündel beschränken. Nach 5.1.7 auf Seite 60 gibt es ein hermitesches Linienbündel mit Zusammenhang (L, h, ∇) , das eine Quantisierung des Systems mit Magnetfeld b auf X liefert. Da $\gamma^*b = b$ für $\gamma \in \Gamma$, ist auch $(\gamma^*L, \gamma^*h, \gamma^*\nabla)$ eine Quantisierung des gegebenen Systems, wenn wir γ als Diffeomorphismus $X \rightarrow X$ auffassen und die Strukturen vermittle γ von X nach X zurückziehen. Dabei ist für $s \in C^\infty(\gamma^*L)$, $v \in C^\infty(TX)$

$$(\gamma^*\nabla)_v(s) = \gamma^*(\nabla_{\gamma_*v}((\gamma^*)^{-1}s)).$$

Sind (L, h, ∇) und $(\gamma^*L, \gamma^*h, \gamma^*\nabla)$ äquivalent im Sinne von 5.1.8, so gibt es einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus $\Phi_\gamma : L \rightarrow \gamma^*L$ mit

$$\Phi_\gamma \circ \nabla_v = (\gamma^*\nabla_v) \circ \Phi_\gamma$$

für $v \in C^\infty(TX)$. Somit wird

$$\Phi_\gamma \circ \nabla_v = \gamma^*\nabla_{\gamma_*v}((\gamma^*)^{-1} \circ \Phi_\gamma). \quad (5.4.3)$$

Wir definieren daher eine Abbildung

$$\begin{aligned} U_\gamma : C^\infty(L) &\rightarrow C^\infty(L) \\ (U_\gamma s)(x) &= ((\gamma^*)^{-1} \circ \Phi_\gamma s)(x), \\ &= \Phi_\gamma s(\gamma^{-1}x), \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

die von einem nichtstrikten Morphismus

$$\begin{aligned} u_\gamma = \gamma \circ \Phi_\gamma : L &\rightarrow \gamma^*L \rightarrow L, \\ l &\mapsto \Phi_\gamma(l) \mapsto \gamma\Phi_\gamma(l) \end{aligned}$$

herrührt. Nach Konstruktion ist dann $U_\gamma^{-1}H^{L,\nabla}U_\gamma = H^{L,\nabla}$ wegen (5.4.3). Zusammenfassend haben wir

5.4.3 Theorem (eichperiodischer magnetischer Schrödingeroperator)

Sei (X, g, b) ein quantisierbares System mit Magnetfeld und (L, h, ∇) eine Quantisierung. Ist $H^1(X, S^1) = 0$, so ist der magnetische Schrödingeroperator $H^{L,\nabla}$ ein eichperiodischer elliptischer Operator mit im allgemeinen nichtkonstantem Kozyklus.

Beweis Ist $H^1(X, S^1) = 0$, so sind nach 5.1.17 auf Seite 63 alle Quantisierungen der Form $(\gamma^*L, \gamma^*h, \gamma^*\nabla)$ äquivalent, und die magnetischen Translationen (5.4.4) existieren für alle $\gamma \in \Gamma$. Da die Φ_γ hermitesche Linienbündelisomorphismen sind und die Γ -Aktion isometrisch ist, werden die magnetischen Translationen unitäre Abbildungen. Sie bilden eine projektive Darstellung, da

$$u_{\gamma_1}u_{\gamma_2}u_{\gamma_1\gamma_2}^{-1}$$

ein strikter hermitescher Linienbündelisomorphismus $L \rightarrow L$ ist, also (punktweise) in S^1 . \square

Kapitel 6

Spektraltheorie für Beispielklassen

In diesem Kapitel untersuchen wir für zwei Klassen von Beispielen eichperiodischer elliptischer Operatoren die Anwendbarkeit der allgemeinen Theorie aus Kapitel 3 und zeigen im Fall der abelschperiodischen elliptischen Operatoren darüber hinausgehende Resultate. Hierbei lassen wir uns von (Hempel & Herbst, 1995) leiten, wo 6.2.9 für \mathbb{Z}^d -periodische magnetische Schrödingeroperatoren auf dem \mathbb{R}^d gezeigt wird.

6.1	Eichperiodische elliptische Operatoren	72
6.1.1	Theorem: Spektrum eichperiodischer Operatoren	72
6.1.2	Beispiel: eichperiodischer magnetischer Schrödingeroperator	72
6.2	Periodische elliptische Operatoren	72
6.2.1	Definition: periodischer Operator	72
6.2.2	Bemerkung: geeicht periodischer Operator	73
6.2.3	Theorem: Spektrum abelschperiodischer Operatoren	73
6.2.4	Hilfssatz: Zerlegung eines abelschperiodischen Operators	73
6.2.5	Korollar: umgekehrte Blocheigenschaft	74
6.2.6	Hilfssatz: reell-analytische Familie	75
6.2.7	Lemma: ζ -regularisierte Determinante	76
6.2.8	Lemma: reelle Analytizität und Maß	76
6.2.9	Theorem: spektrale Natur abelschperiodischer Operatoren	77

6.1 Eichperiodische elliptische Operatoren

Wie wir in Abschnitt 4.2 gesehen haben, ist jeder symmetrische eichperiodische elliptische Operator D ein wesentlich selbstadjungierter Hilbertraumoperator und definiert einen \mathcal{A} -elliptischen Operator auf einem Hilbertmodul \mathcal{E} , und e^{-D^*D} ist in der tr_τ -Spurklasse. Dabei ist \mathcal{A} eine getwistete Gruppen- C^* -Algebra. Aus B.2 wissen wir, daß \mathcal{A} die Voraussetzungen von 3.2.2 auf Seite 33 erfüllt. Wir haben daher zusammenfassend:

6.1.1 Theorem (Spektrum eichperiodischer Operatoren)

Sei D ein symmetrischer eichperiodischer elliptischer Operator. Dann ist D wesentlich selbstadjungiert. Alle isolierten Eigenwerte von \bar{D} sind unendlich entartet, die zugehörigen Eigenräume sind (algebraisch) endlich erzeugte projektive \mathcal{A} -Moduln.

Erfüllt $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ die Kadisonbedingung, so hat das Spektrum von D Bandstruktur. Hat dagegen $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand tr_τ , so sind die beschränkten selbstadjungierten Operatoren mit Cantorspektrum dicht in $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})_{sa}$. Jeder symmetrische eichperiodische elliptische Operator ist dann im Resolventensinn approximierbar durch einen mit Cantorspektrum.

6.1.2 Beispiel (eichperiodischer magnetischer Schrödingeroperator)

Wie wir in 5.4.3 auf Seite 69 gesehen haben ist jeder eichperiodische magnetische Schrödingeroperator ein eichperiodischer elliptischer Operator, so daß wir 6.1.1 direkt anwenden können.

Ist speziell $X = \mathbb{R}^2$ und $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^2$, so ist die Magnetfeld-2-Form automatisch exakt, so daß wir einen geeigneten auf X konstanten Kozyklus $\Theta \in H^2(\mathbb{Z}^2, S^1) \simeq S^1$ wie in 5.4.2 wählen können. $\mathcal{A} = C_r^*(\mathbb{Z}^2, \Theta)$ ist dann eine Rotationsalgebra \mathcal{A}_θ . Aus deren Eigenschaften (siehe B.4.1 auf Seite 99) folgt, daß des magnetischen Schrödingeroperators für rationales θ Bandstruktur hat, wogegen für irrationales θ schwache Generalisiertheit von Cantorspektrum vorliegt.

Ist X eine riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 0$ und betrachten wir den eichperiodischen Schrödingeroperator mit konstantem Magnetfeld¹, so liegt bei rationalem Fluß wiederum Bandspektrum vor (siehe B.4.3 auf Seite 100).

6.2 Periodische elliptische Operatoren

6.2.1 Definition (periodischer Operator)

*Ein eichperiodischer Operator auf einem Bündel E über X heißt (**geeicht**) **periodisch**, falls $\Theta = 1$ ist. Wir nennen einen solchen Operator **strikt periodisch**, falls er auf einem trivialen Bündel operiert und die Eichtranslationen mit der kanonischen Aktion übereinstimmen.*

¹Konstant heißt hier proportional zur Volumenform.

6.2.2 Bemerkung (geeicht periodischer Operator)

Die Bündelmorphismen $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, die dem eichperiodischen Operator nach 4.1.7 auf Seite 47 zugeordnet sind, definieren für $\Theta = 1$ einen (echten) Lift der Γ -Aktion von X auf das Bündel E . Daher haben wir einen periodischen Operator im Sinne von Kapitel 2.

Ist $E = X \times \mathbb{C}^m$, so liftet die Γ -Aktion kanonisch von X zu einer Aktion von $(t_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ auf E . Nach 4.1.7 gibt es strikte Bündelmorphismen $(m_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ mit $u_\gamma = m_\gamma t_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Die Bedingung für strikte Periodizität bedeutet $m_\gamma = \mathbb{I}$, $\gamma \in \Gamma$. Für nichttriviale Bündel gibt es keinen kanonischen Lift, anhand dessen man diesen Begriff definieren könnte.

Periodische elliptische Operatoren sind also spezielle eichperiodische Operatoren und daher \mathcal{A} -elliptische Operatoren, wobei \mathcal{A} eine (ungetwistete) Gruppen- C^* -Algebra ist. 6.1.1 ist natürlich direkt anwendbar. Für nichtabelsches Γ bringt allein der Wegfall des Kozyklus allerdings keine wesentliche Erleichterung bei der Analyse von \mathcal{A} . Wir untersuchen daher den Fall abelschperiodischer Operatoren:

6.2.3 Theorem (Spektrum abelschperiodischer Operatoren)

Sei D ein symmetrischer elliptischer abelschperiodischer Operator. Dann ist D wesentlich selbstadjungiert, und das Spektrum von \bar{D} hat Bandstruktur. Isolierte Eigenwerte sind unendlich entartet, die zugehörigen Eigenräume haben endliche tr_τ -Dimension.

Beweis Ist Γ abelsch, so ist $C_r^*(\Gamma) \simeq C(\hat{\Gamma})$. Als Strukturgruppe der Überlagerung $X \rightarrow M$ mit kompaktem M ist Γ endlich erzeugt, da $\pi_1(M)$ endlich erzeugt und Γ das Bild von $\pi_1(M)$ unter einem Gruppenhomomorphismus ist. Folglich hat $\hat{\Gamma}$ endlich viele Zusammenhangskomponenten. Projektionen in $C(\hat{\Gamma})$ sind charakteristische Funktionen, minimale Projektionen sind charakteristische Funktionen von Zusammenhangskomponenten. Da τ auf $C(\hat{\Gamma})$ das Integral bezüglich des Haarmaßes (siehe B.2.2 auf Seite 94) und das Haarmaß invariant ist, haben alle Zusammenhangskomponenten das gleiche Maß $1/n$, wenn n die Zahl der Zusammenhangskomponenten² von $\hat{\Gamma}$ ist. Damit ist die Kadisonkonstante von $C(\hat{\Gamma})$ gegeben durch $1/n > 0$. Schließlich ist wegen $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{K}$ in diesem Fall $1/n$ auch die Kadisonkonstante von $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$, so daß wir 3.2.3 auf Seite 33 anwenden können.

Die Aussage über isolierte Eigenwerte ist eine direkte Anwendung von 3.2.2.

6.2.3

6.2.4 Hilfssatz (Zerlegung eines abelschperiodischen Operators)

Es gibt ein direktes Integral

$$L^2(E) \simeq \int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} L^2(E_\chi) d\chi \text{ mit} \quad (6.2.1)$$

$$E_\chi = E' \otimes F_\chi, \quad (6.2.2)$$

so daß ein symmetrischer elliptischer abelschperiodischer Operator D zerlegbar ist als

$$\bar{D} \simeq \int_{\hat{\Gamma}}^{\oplus} \bar{D}_\chi d\chi, \quad (6.2.3)$$

$$D_\chi = D|_{C^\infty(E)^{\Gamma_\chi}}. \quad (6.2.4)$$

² n ist auch gerade die Ordnung des Torsionsanteils von Γ .

Beweis Theorem 2.1.16 auf Seite 20.

6.2.4

6.2.5 Korollar (umgekehrte Blocheigenschaft)

Ein symmetrischer elliptischer abelschperiodischer Operator hat die umgekehrte Blocheigenschaft, d. h. zu jedem $\lambda \in \text{spec } \bar{D}$ gibt es ein beschränktes $s \in C^\infty(E)$ mit $Ds = \lambda s$.

Beweis Ist $\lambda \in \text{spec } \bar{D}$, so hat nach der allgemeinen Theorie für direkte Integrale (siehe Punkt 3 von Lemma 2.1.12 auf Seite 17)

$$\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \cap \text{spec } \bar{D}_\chi \neq \emptyset\}$$

positives Maß für jedes $\varepsilon > 0$. Die \bar{D}_χ haben als elliptische Operatoren auf einer kompakten Mannigfaltigkeit diskretes Spektrum, und die Eigenwerte hängen stetig von χ ab³. Wählen wir eine Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(\lambda - 1/n, \lambda + 1/n) \cap \text{spec } \bar{D}_{\chi_n} \neq \emptyset$, so gibt es einen Häufungspunkt χ_∞ ($\hat{\Gamma}$ ist kompakt), und aus Stetigkeitsgründen ist $\lambda \in \text{spec } \bar{D}_{\chi_\infty}$.

Da $\text{spec } \bar{D}_{\chi_\infty}$ diskret ist, ist λ ein Eigenwert von \bar{D}_{χ_∞} . Der Lift einer Eigenfunktion⁴ liegt in $C^\infty(E)^{\Gamma, \chi}$ und ist daher beschränkt. Außerdem erfüllt der Lift die selbe Eigenwertgleichung wegen (6.2.4). 6.2.5

Die Operatoren D_χ wirken noch auf verschiedenen Bündeln. Wir wollen nun einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus $S_\chi : F_{\chi_0} \rightarrow F_\chi$ konstruieren, so daß $D'_\chi := (\mathbb{I}_{E'} \otimes S_\chi^*) \bar{D}_\chi (\mathbb{I}_{E'} \otimes S_\chi)$ eine reell-analytische Familie von Operatoren auf E_{χ_0} wird. Eine reell-analytische Struktur auf $\hat{\Gamma}$ erhalten wir, indem wir einen Isomorphismus $\hat{\Gamma} = T^n \times \Sigma$ wählen, wobei Σ der (diskrete) Torsionsanteil ist. Die reell-analytische Standardstruktur des n -Torus⁵ T^n induziert dann eine reell-analytische Struktur auf $\hat{\Gamma}$.

Weiterhin beachten wir, daß in unserer Situation die Folge von Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi_1(X)} & X \xrightarrow{\Gamma} M \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\pi_1(M)} & M \end{array}$$

die exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(M) & \longrightarrow & \Gamma \longrightarrow 0 \\ 0 & \longleftarrow & \widehat{\pi_1(X)} & \longleftarrow & \widehat{\pi_1(M)} & \longleftarrow & \hat{\Gamma} \longleftarrow 0 \end{array}$$

liefert. Wir können daher die Charaktere aus $\hat{\Gamma}$ injektiv in $\widehat{\pi_1(M)}$ einbetten. Dies erlaubt uns, die Bündel $F_\chi = X \times_\chi \mathbb{C}$ als zu \tilde{M} assoziierte Bündel $\tilde{M} \times_\chi \mathbb{C}$ aufzufassen:

³Die \bar{D}_χ bilden eine stetige Familie, siehe dazu auch 6.2.6 auf der gegenüberliegenden Seite.

⁴Eigenfunktionen eines elliptischen Operators sind glatt.

⁵Wie schon bemerkt, ist Γ endlich erzeugt, so daß tatsächlich $n < \infty$.

6.2.6 Hilfssatz (reell-analytische Familie)

Sei $\chi_0 \in \hat{\Gamma}$. Dann gibt es für jedes χ in der Zusammenhangskomponente von χ_0 einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus $S_\chi : F_{\chi_0} \rightarrow F_\chi$. Setzen wir $D'_\chi := (\mathbb{I}_{E'} \otimes S_\chi^*) \tilde{D}_\chi (\mathbb{I}_{E'} \otimes S_\chi)$, so wird $(D'_\chi)_{\chi \in \Gamma}$ eine reell-analytische Familie mit konstantem Definitionsbereich.

Beweis Sei zunächst $\chi_0 = 1$. $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ sei ein beliebiger fest gewählter Bezugspunkt. Für $\omega \in \Omega^1(M)$, $d\omega = 0$, sei $\tilde{\omega} \in \Omega^1(\tilde{M})$ der Rückzug. Dann ist

$$\tilde{s}_\omega(\tilde{x}) := \exp\left(\imath \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} \tilde{\omega}\right)$$

wohldefiniert, da $d\tilde{\omega} = 0$ und $\pi_1(\tilde{M}) = 0$ ist. Für $\gamma \in \pi_1(M)$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{s}_\omega(\gamma\tilde{x}) &= \exp\left(\imath \int_{\tilde{x}_0}^{\tilde{x}} \tilde{\omega} + \imath \int_{\tilde{x}}^{\gamma\tilde{x}} \tilde{\omega}\right) \\ &= \tilde{s}_\omega \exp\left(\int_{c(\gamma)} \omega\right) \\ &= \tilde{s}_\omega(\tilde{x}) \chi_\omega(\gamma) \end{aligned}$$

mit dem Charakter $\chi_\omega \in \pi_1(\tilde{M})$, der ω gemäß unserem Isomorphismus für den Jacobitorus (siehe Beweis von 5.2.1 auf Seite 63) zugeordnet ist. Wir hatten dort gesehen, daß wir jeden Charakter aus $(\pi_1(\tilde{M}))_0$ in der Form χ_ω darstellen können für ein geeignetes ω . Insbesondere ist dies für jeden Charakter aus $(\hat{\Gamma})_0$ möglich.

\tilde{s}_ω definiert also einen Schnitt $s_\omega \in C^\infty(\tilde{M} \times_{\chi_\omega} \mathbb{C})$ mit punktweiser Norm 1 und damit einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus

$$\begin{aligned} S_{\chi_\omega} : M \times \mathbb{C} &\rightarrow \tilde{M} \times_{\chi_\omega} \mathbb{C}, \\ f &\mapsto fs_\omega, \end{aligned}$$

so daß

$$\mathbb{I}_{E'} \otimes S_\chi : E' \rightarrow E_{\chi_\omega}.$$

Schließlich ist $d\tilde{s}_\omega(\gamma\tilde{x}) = \imath \tilde{s}_\omega \tilde{\omega}$. Daher ist auf $C_0^\infty(M)$

$$\begin{aligned} D'_{\chi_\omega} &:= (\mathbb{I}_{E'} \otimes S_{\chi_\omega}^*) D_{\chi_\omega} (\mathbb{I}_{E'} \otimes S_{\chi_\omega}) \\ &= D + T_{\chi_\omega}, \end{aligned}$$

wobei T_{χ_ω} ein Differentialoperator der Ordnung $\text{ord}(D) - 1$ ist mit glatten, beschränkten Koeffizienten, die reell-analytisch in χ sind, da sie ω nur polynomial enthalten. Daher hat D'_χ als Definitionsbereich den Sobolevraum $W^{\text{ord}(D)}(E')$, unabhängig von χ .

Ist $\chi_0 \neq 1$ in einer beliebigen Komponente von $\hat{\Gamma}$, so erhalten wir wegen $E_{\chi_0} \simeq E_{\chi_0} \otimes (M \times \mathbb{C})$ ebenfalls einen hermiteschen Linienbündelisomorphismus

$$\mathbb{I}_{E_{\chi_0}} \otimes S_{\chi_\omega} : E_{\chi_0} \rightarrow E_{\chi_0 \chi_\omega}$$

mit den gleichen Eigenschaften wie oben. Wir haben also über jeder Zusammenhangskomponente die gewünschte reell-analytische Familie. 6.2.6

6.2.7 Lemma (ζ -regularisierte Determinante)

Ist D nach unten beschränkt, so besitzt jede Faser $\bar{D}'_\chi - \lambda$ eine ζ -regularisierte Determinante

$$d_D(\lambda, \chi) = \det^\zeta(\bar{D}'_\chi - \lambda)$$

derart, daß $d_D(\lambda, \chi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{spec } \bar{D}'_\chi$. d_D ist reell-analytisch in χ und analytisch in λ .

Beweis \bar{D}'_χ ist ein nach unten beschränkter ($\bar{D} \geq C \Rightarrow \bar{D}_\chi \geq C$ wegen (6.2.4)), selbstadjungierter elliptischer Operator auf einer kompakten Mannigfaltigkeit und besitzt daher eine ζ -regularisierte Determinante $d_D(\lambda, \chi) = \det^\zeta(\bar{D}'_\chi - \lambda)$, die analytisch in λ ist und $d_D(\lambda, \chi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \text{spec } \bar{D}'_\chi$ erfüllt (siehe z. B. Gilkey, 1995). Da die Familie (D'_χ) reell-analytisch in χ ist, hängen auch die Koeffizienten der Wärmeleitungsasymptotik reell-analytisch von χ ab, die Asymptotik ist gleichmäßig in χ und die ζ -Funktion und damit die ζ -regularisierte Determinante reell-analytisch in χ . □

Aus (Hempel & Herbst, 1995) zitieren wir

6.2.8 Lemma (reelle Analytizität und Maß)

1. Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, $h : O \rightarrow \mathbb{C}$ reell-analytisch. Ist $h^{-1}(\{0\})$ keine Nullmenge für das Lebesguemaß meas , so ist $h \equiv 0$.
2. Sei $O \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \times O \rightarrow \mathbb{C}$ reell-analytisch, $f \not\equiv 0$. Für Borelmengen $B \subset \mathbb{R}$ definiert

$$\mu^f(B) = \text{meas}\{k \in O \mid \exists \lambda \in B \ f(\lambda, k) = 0\} \quad (6.2.5)$$

ein subadditives Maß⁶. Dann gilt:

- (a) μ^f besitzt keine singulärstetige Komponente⁷.
- (b) Die Atome⁸ von μ^f liegen diskret in \mathbb{R} .

⁶Ein subadditives Maß μ erfüllt alle Eigenschaften eines Maßes bis auf die Additivität, die auch für disjunkte Mengen A, B nur in der Form $\mu(A \cap B) \leq \mu(A)\mu(B)$ gilt.

⁷Ein subadditives Maß besitzt im allgemeinen keine eindeutige Radon-Nikodym-Zerlegung. Es ist hier gemeint, daß es keine Zerlegung mit singulärstetigem Anteil gibt.

⁸Atome sind wie im Fall eines echten Maßes definiert durch $\mu(\{\lambda\}) > 0$.

6.2.9 Theorem (spektrale Natur abelschperiodischer Operatoren)

Sei D ein symmetrischer elliptischer abelschperiodischer Operator. Dann gilt für das Spektrum von \bar{D} :

1. Das singulärstetige Spektrum ist leer.
2. Das Punktspektrum liegt diskret in \mathbb{R} .
3. Ist λ ein Eigenwert von \bar{D} , so gibt es eine Zusammenhangskomponente Λ von $\hat{\Gamma}$, so daß für alle $\chi \in \Lambda$ gilt: $\lambda \in \text{spec } \bar{D}_\chi$.

Beweis Wir zeigen zunächst, daß wir oBdA $\bar{D} \geq 0$ annehmen können. Dazu beachten wir, daß für die Spektralprojektionen P^D und P^{D^2} von \bar{D} und \bar{D}^2 gilt:

$$\begin{aligned}
 P^{D^2}(\lambda) &= 1_{(-\infty, \lambda]}(\bar{D}^2) \\
 &= (1_{(-\infty, \lambda]} \circ (\cdot)^2)(\bar{D}) \\
 &= 1_{[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]}(\bar{D}) \\
 &= P^D_{[-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}]} \\
 &= \begin{cases} P^D(\sqrt{\lambda}) - P^D(-\sqrt{\lambda}), & \text{falls } \lambda \geq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{6.2.6}
 \end{aligned}$$

wobei wir $\sqrt{\lambda} := \text{sgn } \lambda \sqrt{|\lambda|}$ setzen. Für das Punktspektrum und das gesamte Spektrum als Menge können wir den Spektralabbildungssatz

$$\text{spec}_p(\bar{D}^2) = (\text{spec}_p \bar{D})^2, \quad \text{spec}(\bar{D}^2) = (\text{spec } \bar{D})^2$$

anwenden. Damit folgt wegen Stetigkeit von $(\cdot)^2$ und $\sqrt{\cdot}$ auch $\text{spec}_{p.p.}(\bar{D}^2) = (\text{spec}_{p.p.} \bar{D})^2$, da $\text{spec}_{p.p.} = \overline{\text{spec}_p}$. Für 2. und 3. genügt es daher, \bar{D}^2 zu betrachten.

Hat \bar{D}^2 kein singulärstetiges Spektrum, so gilt für jede Lebesgue-Nullmenge B mit $B \subset \mathbb{R} \setminus \text{spec}_{p.p.}(\bar{D}^2)$ und jedes $s \in \mathcal{D}(\bar{D}^2) \setminus 0 \subset \mathcal{D}(\bar{D}) \setminus 0$, daß das Spektralmaß $\mu_{s,s}^{D^2}(B) = 0$ ist. Setzen wir

$$\begin{aligned}
 B &:= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda^2 \in \tilde{B}\} = \sqrt{|\tilde{B}|} \cup \left(-\sqrt{|\tilde{B}|}\right), \\
 \tilde{B} &:= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \in \tilde{B}\} = B^2 \cup (-B^2) = \tilde{B} \cup (-\tilde{B}) \supset \tilde{B}
 \end{aligned}$$

für eine Lebesgue-Nullmenge $\tilde{B} \subset \mathbb{R} \setminus \text{spec}_{p.p.} \bar{D}$, so ist B eine Lebesgue-Nullmenge und enthält nach dem Spektralabbildungssatz keine Elemente von $\text{spec}_{p.p.}(\bar{D}^2)$. Aus (6.2.6) folgt

$$0 = \mu_{s,s}^{D^2}(B)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}} 1_B(\lambda) d\langle s | P^{D^2}(\lambda) s \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} 1_B(\lambda) d\langle s | P^D(\sqrt{\lambda}) s \rangle - \int_{\mathbb{R}_+} 1_B(\lambda) d\langle s | P^D(-\sqrt{\lambda}) s \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} 1_B(\lambda^2) d\langle s | P^D(\lambda) s \rangle - \int_{\mathbb{R}_+} 1_B(\lambda^2) d\langle s | P^D(-\lambda) s \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_B(\lambda^2) d\langle s | P^D(\lambda) s \rangle \\
&= \mu_{s,s}^D(\tilde{\tilde{B}}) \\
&\geq \mu_{s,s}^D(\tilde{B}).
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{D}(\bar{D}^2)$ dicht ist, folgt damit $\text{spec}_{s.c.} \bar{D} = \emptyset$. Daher reicht es auch für $1, \bar{D}^2$ zu betrachten. Schließlich ist D^2 nach Voraussetzung ein symmetrischer elliptischer abelschperiodischer Differentialoperator mit $\bar{D}^2 = \overline{D^2}$ wegen der wesentlichen Selbstadjungiertheit, so daß wir im folgenden $D \geq 0$ voraussetzen können.

d_D sei die reell-analytische Familie von ζ -Determinanten von D_χ , die nach 6.2.8 auf Seite 76 existiert.

3. Ist $\lambda \in \text{spec}_p(\bar{D})$, so ist nach der allgemeinen Theorie für direkte Integrale (siehe Punkt 4 von Lemma 2.1.12 auf Seite 17)

$$\begin{aligned}
0 &< \text{meas}(\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \lambda \in \text{spec}_p(\bar{D}_\chi)\}) \\
&= \text{meas}(\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid d_D(\lambda, \chi) = 0\}) \\
&= \text{meas}(h^{-1}(\{0\})) \text{ mit} \\
h &= d_D(\lambda, \cdot).
\end{aligned}$$

Da $\hat{\Gamma}$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten hat, muß es eine Komponente Λ geben, so daß $\text{meas}(h^{-1}(0) \cap \Lambda) > 0$ ist. Dann erfüllt $h|_\Lambda$ die Voraussetzungen von 6.2.8.1, so daß $h|_\Lambda \equiv 0$ folgt und damit $\lambda \in \text{spec } \bar{D}_\chi$ für $\chi \in \Lambda$.

2. Wie oben ist

$$\begin{aligned}
\lambda \in \text{spec}_p \bar{D} &\Leftrightarrow \text{meas}(\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \lambda \in \text{spec}_p(\bar{D}_\chi)\}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \text{meas}(\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid d_D(\lambda, \chi) = 0\}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \mu^{d_D}(\{\lambda\}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \text{ ist ein Atom von } \mu^{d_D}.
\end{aligned}$$

Die Atome liegen aber nach 6.2.8.34 diskret.

1. Für $s \in \mathcal{D}(\bar{D})$, $B \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar sei mit $\mu_f^D(B)$ das Spektralmaß von D zu f bezeichnet, P^D sei die Spektralschar von \bar{D} . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \mu_f^D(B) &= \int 1_B(\lambda) d\mu_f^D(\lambda) \\
 &= \int 1_B(\lambda) d\langle f | P^D(\lambda) f \rangle_{L^2(E)} \\
 &= \langle f | 1_B(\bar{D}) f \rangle_{L^2(E)} \\
 &= \langle 1_B(\bar{D}) f | 1_B(\bar{D}) f \rangle_{L^2(E)} \\
 &= \|1_B(\bar{D}) f\|_{L^2(E)}^2 \\
 &= \int_{\hat{\Gamma}} \|1_B(\bar{D}_\chi) f_\chi\|_{L^2(E_\chi)}^2 d\chi \\
 &= \int_{\hat{\Gamma}} \mu_{f_\chi}^{D_\chi}(B) d\chi.
 \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
 \text{meas}\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \mu_{f_\chi}^{D_\chi}(B) \neq 0\} &\leq \text{meas}\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid B \cap \text{spec } \bar{D}_\chi \neq \emptyset\} \\
 &= \text{meas}\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \exists \lambda \in B \ d_D(\lambda, \chi) = 0\} \\
 &= \mu^{d_D}(B).
 \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

Sei nun $B \cap \text{spec}_p D = \emptyset$, so daß B keine Atome von μ^{d_D} enthält. Ist $\text{meas}(B) = 0$, so folgt $\mu^{d_D}(B) = 0$, da μ^{d_D} nach 6.2.8.33 keine singulärstetige Komponente bezüglich meas hat. Wegen (6.2.8) ist dann $\text{meas}\{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \mu_{f_\chi}^{D_\chi}(B) \neq 0\} = 0$, so daß schließlich $\mu_f^D(B) = 0$ aus (6.2.7) folgt. Daher hat μ_f^D keinen bezüglich meas singulärstetigen Anteil. 6.2.9

Kapitel 7

Schluß

7.1	Ein abschließendes Beispiel	81
7.2	Ausblick	82

7.1 Ein abschließendes Beispiel

Zum Abschluß betrachten wir noch einmal den Schrödingeroperator $H = H^{\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}, \nabla - ia} + V$ mit konstantem Magnetfeld da und \mathbb{Z}^n -periodischem Potential V auf dem \mathbb{R}^n und wenden einige Resultate dieser Arbeit an.

ganzzahliger Fluß In diesem Fall vertauschen die magnetischen Translationen miteinander, der Operator ist (geeicht) periodisch (5.3.1). Theorem 5.3.2 und Korollar 5.3.3 zeigen, daß H eine Zerlegung der Form

$$H = \int_{T^n}^{\oplus} H_{\chi} d\chi$$

besitzt. H_{χ} ist hierbei ein magnetischer Schrödingeroperator $H^{L_{\chi}, \nabla} + V$ mit konstantem Magnetfeld auf dem n -Torus. Jede Quantisierungs-klasse des Systems auf T^n tritt genau einmal als Faser von H auf.

Nach Theorem 6.1.1 besitzt H nur wesentliches Spektrum. Theorem 6.2.9 zeigt, daß das singulärstetige Spektrum leer ist und das Punktspektrum diskret in \mathbb{R} liegt. Wie man am Landauoperator ($n = 2, V = 0$) sieht, läßt sich dieses Resultat nicht mehr verschärfen.

rationaler Fluß Ist der magnetische Fluß p/q , so kann man das Gitter entlang einer Richtung um den Faktor q vergrößern und erhält so einen Fluß p pro Gitterzelle, so daß die Theoreme für ganzzahligen Fluß anwendbar sind.

irrationaler Fluß In diesem Fall ist H eichperiodisch, die relevante C^* -Algebra ist eine Rotationsalgebra \mathcal{A}_θ mit irrationalem θ . Nach Theorem 3.2.2 hat H nur wesentliches Spektrum. Theorem 3.2.4 zeigt, daß H im Resolventensinn beliebig gut durch einen Operator mit Cantorspektrum approximiert werden kann.

7.2 Ausblick

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war die Bereitstellung eines geeigneten Rahmens für die Behandlung verschiedener Klassen eichperiodischer Operatoren. Neben den dargestellten Resultaten liefert diese neue Sichtweise auch Anregungen für eine Fülle weiterer Fragen, denen es in Zukunft nachzugehen gilt:

- **Lückenasymptotik:** Die Abschätzung der spektralen Lückenbreite für Schrödingeroperatoren kann man — beziehentlich auf eine Anregung von Jochen Brüning — auch als Resultat unter einer periodischen (oder beschränkten) lokalen Störung des Laplaceoperators ansehen. Im allgemeinen sollte für das Spektrum eines durch ein beschränktes Potential¹ V gestörten elliptischen Operators gelten:

$$\text{Dist}_\lambda(\text{spec}_{ess}(D), \text{spec}_{ess}(D + V)) = O(\lambda^{-p})$$

Hier ist p die Ordnung von D und $\text{Dist}_\lambda(B_1, B_2) = \text{Dist}([\lambda, \infty) \cap B_1, [\lambda, \infty) \cap B_2)$ mit dem Hausdorffabstand Dist zweier abgeschlossener Mengen.

- Untersuchung weiterer Zusammenhänge zwischen Eigenschaften einer C^* -Algebra \mathcal{A} und des Spektrum \mathcal{A} -elliptischer Operatoren; für konkrete Anwendungen interessant ist insbesondere das „gap labelling“ mittels $K_0(\mathcal{A})$ und die dazugehörige Störungstheorie. Sie sollte ermöglichen, Kriterien für das „Überleben“ z.B. der Landauniveaus unter periodischen Störungen zu entwickeln.
- Die Spektraltheorie selbstdualer Hilbert- W^* -Moduln sollte auf ihre Anwendbarkeit für die Spektraltheorie von Hilbertraumoperatoren untersucht werden.
- Untersuchung weiterer Beispiele mit RRI_0 ; als erstes Ziel bieten sich die reduzierten gewisteten C^* -Algebren der Fuchsschen Gruppen an. Ihre K -Theorie ist bekannt und liefert daher einen Anhaltspunkt für die Modifizierung der entsprechenden Methoden bei den Rotationsalgebren.
- Nichtkommutative Mannigfaltigkeiten mit nichtkommutativen Symmetrien als Beispiel für die nichtkommutative Blochtheorie. Die (nichtkommutative) riemannsche Struktur sollte die Definition eines Elliptizitätsbegriffs ermöglichen, der mit einem geeigneten Symbolraum arbeitet.

¹ V sollte natürlich in einem geeigneten Sinne zentriert sein, d.h. strikt ($\int V = 0$ für $V \in L^1$) oder gemittelt ($\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^d} \int_{B_R(x_0)} V = 0$).

Anhang A

GNS-Darstellung und Tomita-Takesaki-Involution

Dieser Anhang enthält drei kurze Abschnitte mit Bemerkungen, die auf dem Standardkanon bezüglich GNS-Darstellung und Hilbert- C^* -Moduln aufbauen.

A.1 Links- und Rechtsmodulstrukturen	83
A.1.1 Definition: Hilbert-(Rechts-)modul	83
A.1.2 Definition: Hilbertlinksmodul	84
A.1.3 Bemerkung: einfache Eigenschaften	85
A.1.4 Definition: freie und projektive Hilbertmoduln	85
A.1.5 Lemma: Hilbertlinks- und -rechtsmodul	85
A.1.6 Bemerkung: Standardmodul	86
A.2 GNS-Darstellung für Hilbert-C^*-Moduln	86
A.3 Tomita-Takesaki-Involution	87

A.1 Links- und Rechtsmodulstrukturen

Üblicherweise findet man Hilbert- C^* -Moduln als Rechtsmoduln definiert. In diesem Abschnitt definieren wir die entsprechenden Linksmoduln und untersuchen kurz die Zusammenhänge.

A.1.1 Definition (Hilbert-(Rechts-)modul)

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra. Ein \mathcal{A} -Rechtsmodul \mathcal{E} heißt Prä-Hilbert- \mathcal{A} -(Rechts-)Modul, wenn er versehen ist mit einer Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für $e, f, g \in \mathcal{E}$ ist $\langle e | f + g \rangle = \langle e | f \rangle + \langle e | g \rangle$.

2. Für $e, f \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathbb{C}$ ist $\langle e|f\lambda \rangle = \langle e|f \rangle \lambda$.
3. Für $e, f \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}$ ist $\langle e|fa \rangle = \langle e|f \rangle a$.
4. Für $e, f \in \mathcal{E}$ ist $\langle f|e \rangle = \langle e|f \rangle^*$.
5. Für $e \in \mathcal{E}$ ist $\langle e|e \rangle \geq 0$ in \mathcal{A} , und $\langle e|e \rangle = 0 \Leftrightarrow e = 0$.

Die Abbildung $\mathcal{E} \ni e \mapsto \sqrt{\|\langle e|e \rangle\|_{\mathcal{A}}}$ definiert dann eine Norm auf \mathcal{E} . Den **Abschluß** von \mathcal{E} definieren wir als die Vervollständigung von \mathcal{E} als Banachraum mit dieser Norm.

\mathcal{E} heißt **Hilbert- \mathcal{A} -(Rechts-)Modul**, wenn \mathcal{E} in dieser Norm vollständig ist.

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ heißt **adjungierbar**, wenn es ein $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ gibt, so daß für alle $e, f \in \mathcal{E}$ gilt: $\langle e|Tf \rangle = \langle T^*e|f \rangle$. Die Menge der adjungierbaren Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.

Für $e, f \in \mathcal{E}$ definieren wir einen Operator $\pi_{e,f}$ durch

$$\pi_{e,f} : \mathcal{E} \ni x \mapsto e \langle f|x \rangle \in \mathcal{E}.$$

Wir setzen $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) := \text{span}\{\pi_{e,f} \mid e, f \in \mathcal{E}\}$ und nennen dies die Menge der **\mathcal{A} -endlichen Operatoren**. Die Menge $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ der **\mathcal{A} -kompakten Operatoren** ist der Abschluß von $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.

Wie durch die Klammern schon angedeutet, verstehen wir unter einem Hilbertmodul grundsätzlich einen Hilbertrechtsmodul.

A.1.2 Definition (Hilbertlinksmodul)

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra. Ein \mathcal{A} -Linksmodul \mathcal{E} heißt **Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul**, wenn er versehen ist mit einer Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für $e, f, g \in \mathcal{E}$ ist $\langle e + f|g \rangle = \langle e|g \rangle + \langle f|g \rangle$.
2. Für $e, f \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathbb{C}$ ist $\langle \lambda e|f \rangle = \lambda \langle e|f \rangle$.
3. Für $e, f \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}$ ist $\langle ae|f \rangle = a \langle e|f \rangle$.
4. Für $e, f \in \mathcal{E}$ ist $\langle f|e \rangle = \langle e|f \rangle^*$.
5. Für $e \in \mathcal{E}$ ist $\langle e|e \rangle \geq 0$ in \mathcal{A} , und $\langle e|e \rangle = 0 \Leftrightarrow e = 0$.

Die Abbildung $\mathcal{E} \ni e \mapsto \sqrt{\|\langle e|e \rangle\|_{\mathcal{A}}}$ definiert dann eine Norm auf \mathcal{E} . Den **Abschluß** von \mathcal{E} definieren wir als die Vervollständigung von \mathcal{E} als Banachraum mit dieser Norm.

\mathcal{E} heißt **Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul**, wenn \mathcal{E} in dieser Norm vollständig ist.

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ heißt **adjungierbar**, wenn es ein $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ gibt, so daß für alle $e, f \in \mathcal{E}$ gilt: $\langle e|Tf \rangle = \langle T^*e|f \rangle$. Die Menge der adjungierbaren Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.

Für $e, f \in \mathcal{E}$ definieren wir einen Operator $\pi_{e,f}^L$ durch

$$\pi_{e,f}^L : \mathcal{E} \ni x \mapsto \langle x|e \rangle f \in \mathcal{E}.$$

Wir setzen $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) := \text{span}\{\pi_{e,f}^L \mid e, f \in \mathcal{E}\}$ und nennen dies die Menge der **\mathcal{A} -endlichen Operatoren**. Die Menge $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ der **\mathcal{A} -kompakten Operatoren** ist der Abschluß von $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.

A.1.3 Bemerkung (einfache Eigenschaften)

1. Ist \mathcal{E} ein Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Modul, $e \in \mathcal{E}$, so ist wegen A.1.1.4 $\langle e|e \rangle \in \mathcal{A}_{sa}$, so daß die Bedingung $\langle e|e \rangle \geq 0$ in A.1.1.5 sinnvoll ist.
2. Ist \mathcal{E} ein Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Modul, $e, f \in \mathcal{E}, a \in \mathcal{A}$, so gilt:

$$\langle ea|f \rangle = \langle f|ea \rangle^* = (\langle f|e \rangle a)^* = a^* \langle f|e \rangle^* = a^* \langle e|f \rangle$$

Wir haben also \mathbb{C} - und \mathcal{A} -Sesquilinearität.

3. Die \mathbb{C} -Sesquilinearität folgt für unitales \mathcal{A} aus der \mathcal{A} -Sesquilinearität.
4. Für $e, f \in \mathcal{E}$ ist $\pi_{e,f}^* = \pi_{f,e}$, daher ist tatsächlich $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$.
5. $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ sind C^* -Algebren, erstere ist die Multiplier-Algebra der letzteren (siehe z.B. Wegge-Olsen, 1993, Kapitel 15).
6. Alles gilt analog für Hilbertlinksmoduln.
7. $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto a^*b \in \mathcal{A}$ zusammen mit der Rechtsmultiplikation von \mathcal{A} auf \mathcal{A} ergibt die Standard-Hilbert- \mathcal{A} -Modulstruktur auf \mathcal{A} .
8. $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto ab^* \in \mathcal{A}$ zusammen mit der Linksmultiplikation von \mathcal{A} auf \mathcal{A} ergibt die Standard-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodulstruktur auf \mathcal{A} .

A.1.4 Definition (freie und projektive Hilbertmoduln)

Ein Hilbert- \mathcal{A} -Modul heißt **frei**, wenn er ein freier Modul über \mathcal{A} ist. Er heißt **projektiv**, wenn er ein direkter Summand eines freien Moduls ist.

A.1.5 Lemma (Hilbertlinks- und -rechtsmodul)

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra und $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul. Dann definiert

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle^{\mathcal{E}^{op}} : \mathcal{E}^{op} \times \mathcal{E}^{op} &\rightarrow \mathcal{A}^{op} \\ (e^{op}, f^{op}) &\mapsto (\langle f|e \rangle)^{op} \end{aligned} \tag{A.1.1}$$

auf $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{op}$ (Gleichheit als Vektorraum) die Struktur eines Prä-Hilbert- \mathcal{A}^{op} -Moduls. Weiterhin ist für einen Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul $(\mathcal{E}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ auch $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{A}^{op}}(\mathcal{E}^{op})$ und daher $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{K}_{\mathcal{A}^{op}}(\mathcal{E}^{op})$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{L}_{\mathcal{A}^{op}}(\mathcal{E}^{op})$.

Beweis Zwischen \mathcal{A} -Rechtsmoduln \mathcal{E} und \mathcal{A}^{op} -Linksmoduln \mathcal{E}^{op} besteht bekanntlich eine 1:1-Beziehung. Wir haben daher nur die entsprechenden Hilbertmodulstrukturen zu überprüfen: Seien $e^{op}, f^{op} \in \mathcal{E}^{op}, a^{op} \in \mathcal{A}^{op}$. Mit a^{op} und a bezeichnen wir die miteinander korrespondierenden¹ Elemente in \mathcal{A}^{op} bzw. \mathcal{A} . Dann ist

$$\begin{aligned} \langle e^{op} | f^{op} a^{op} \rangle^{\mathcal{E}^{op}} &= (\langle e^{op} | (af)^{op} \rangle)^{op} \\ &= \langle af | e \rangle \\ &= a \langle f | e \rangle \\ &= (\langle f | e \rangle)^{op} a^{op} \\ &= \langle e^{op} | f^{op} \rangle^{\mathcal{E}^{op}} a^{op}. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{op}$ als Banachraum, ist $\mathcal{L}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{E}^{op})$. Weiterhin ist für $e, f, x \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \pi_{e,f}(x) &= e \langle f | x \rangle \\ &= (\langle f | x \rangle)^{op} e^{op} \\ &= \langle x^{op} | f^{op} \rangle^{\mathcal{E}^{op}} e^{op} \\ &= \pi_{f^{op}, e^{op}}^L, \end{aligned}$$

so daß $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{A}^{op}}(\mathcal{E}^{op})$ zueinander isomorph sind und daher auch die jeweiligen Abschlüsse und Multiplialalgebren. A.1.5

A.1.6 Bemerkung (Standardmodul)

Für die Standard-Hilbert- \mathcal{A} -Modulstruktur auf \mathcal{A} ist bekanntlich $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Bezeichnen wir mit \mathcal{A}^L den Standard-Hilbert- \mathcal{A} -Linksmodul, so folgt aus A.1.5: $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^L) \simeq \mathcal{F}_{\mathcal{A}^{op}}(\mathcal{A}^{op}) = \mathcal{A}^{op}$.

A.2 GNS-Darstellung für Hilbert- C^* -Moduln

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra, τ ein Zustand auf \mathcal{A} und \mathcal{E} ein Hilbert- \mathcal{A} -Modul. Wir definieren analog zur bekannten GNS-Darstellung von Banach- $*$ -Algebren ein Skalarprodukt² auf \mathcal{E} durch

$$\langle x | y \rangle_{\tau} := \tau(\langle x | y \rangle_{\mathcal{E}}) \text{ für } x, y \in \mathcal{E}. \quad (\text{A.2.1})$$

¹ \mathcal{A}^{op} und \mathcal{A} sind als Banachräume identisch, in diesem Sinne ist $a^{op} = a$.

² Für Hilbertlinksmoduln muß das Skalarprodukt umgedreht werden, damit man komplexe Linearität auf dem richtigen Faktor erhält.

$N_\tau := \{x \in \mathcal{E} \mid \langle x|x \rangle_\tau = 0\}$ ist der zugehörige Nullraum. Der GNS-Darstellungsraum \mathcal{E}_τ ist dann die Vervollständigung von \mathcal{E}/N_τ bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle_\tau$. $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ operiert auf $x \in \mathcal{E}_\tau$ wegen

$$\begin{aligned} \|Lx\|_\tau^2 &= \langle Lx|Lx \rangle_\tau \\ &= \tau(\langle Lx|Lx \rangle_{\mathcal{E}}) \\ &= \tau(\langle x|L^*Lx \rangle_{\mathcal{E}}) \\ &\leq \tau(\langle x|x \rangle_{\mathcal{E}}) \|L^*L\| \\ &= \|x\|_\tau^2 \|L\|^2 \end{aligned}$$

stetig. Daher haben wir eine *-Darstellung von $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ in $\mathcal{L}(\mathcal{E}_\tau)$.

Ist τ treu, so ist $N_\tau = 0$ und die Darstellung daher treu.

Ist $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ mit $\langle a|b \rangle_{\mathcal{E}} = a^*b$ der kanonische Hilbert- \mathcal{A} -Modul, so erhalten wir die übliche GNS-Darstellung der Multiplialeralgebra $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ und durch Einschränkung die GNS-Darstellung von $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

A.3 Tomita-Takesaki-Involution

Sei \mathcal{A} eine W^* -Algebra, τ ein Zustand auf \mathcal{A} und $\mathcal{A}_\tau = \overline{\mathcal{A}/N_\tau}$ der zugehörige GNS-Darstellungsraum, $\Omega := \mathbb{1} + N_\tau \in \mathcal{A}_\tau$. Nach Konstruktion ist Ω ein zyklischer Vektor für \mathcal{A} , da $\mathcal{A}\Omega = \mathcal{A}$ dicht in \mathcal{A}_τ ist. Offensichtlich ist Ω separierend für \mathcal{A} genau dann, wenn τ treu ist, was wir im folgenden voraussetzen. Wir identifizieren dann $a \in \mathcal{A}$ mit $a\Omega \in \mathcal{A}_\tau$. Damit haben wir die nötigen Strukturen für die Tomita-Takesaki-Theorie (siehe z. B. Li, 1992, Kapitel 8): Die **Tomita-Takesaki-Involution** ist (dicht) definiert durch

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(T) &= \mathcal{A}\Omega, \\ \mathcal{D}(T) \ni a\Omega &\mapsto a^*\Omega \in \mathcal{A}_\tau. \end{aligned}$$

T wird offensichtlich eine antilineare Abbildung. T wird üblicherweise dargestellt in der Polarzerlegung (auf dem reellen Hilbertraum $\mathcal{A}_{\tau,\mathbb{R}}$) $T = J\sqrt{\Delta}$, wobei J antiunitär (komplex antilinear und unitär auf $\mathcal{A}_{\tau,\mathbb{R}}$) und Δ positiv ist. J gestattet dann die Bestimmung des Kommutanten von \mathcal{A} in $\mathcal{L}(\mathcal{A}_\tau)$ vermittle

$$\mathcal{A}' = J\mathcal{A}J. \quad (\text{A.3.1})$$

Ist τ eine Spur, so ist

$$\begin{aligned} 2\langle Ta|b \rangle_{\tau,\mathbb{R}} &= \langle Ta|b \rangle_\tau + \langle b|Ta \rangle_\tau \\ &= \langle a^*|b \rangle_\tau + \langle b|a^* \rangle_\tau \\ &= \tau(ab) + \tau(b^*a^*) \\ &= \tau(a^*b^*) + \tau(ba) \\ &= 2\langle a|Tb \rangle_{\tau,\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Somit ist $T^* = T = T^{-1}$ und daher $J = T, \Delta = \text{id}$. In der Tomita-Takesaki-Theorie ist dies der triviale Fall, da wegen $\Delta = 1$ die modulare Automorphismengruppe trivial ist.

Andererseits definiert die Abbildung

$$\mathcal{A} \ni a \mapsto a^* \in \mathcal{A}^{op}$$

einen reellen, komplex antilinearen *-Isomorphismus von \mathcal{A} in die W^* -Algebra \mathcal{A}^{op} mit der umgekehrten Multiplikation, so daß wegen (A.3.1) der Kommutant von \mathcal{A} in $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$ (komplex) *-isomorph zu \mathcal{A}^{op} ist.

Anhang B

Getwistete verschränkte Produkte

Nach der Definition der nötigen Begriffe rund um getwistete verschränkte Produkte erweitern wir die bekannten äquivalenten Kasparovgruppen für den twistäquivalenten Fall, um mit dem Funktor $j_{G,\theta} : KK_{G,\theta}(\cdot, \cdot) \rightarrow KK(\cdot \times_{\cdot,\theta} G, \cdot \times_{\cdot,\theta} G)$ den in der Einleitung beschriebenen Weg von den eichperiodischen elliptischen Operatoren zu den entsprechenden Operatoren auf Hilbert- C^* -Moduln abstrakt beschreiben zu können.

B.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	90
B.1.1	Definition: Gruppenkozyklus	90
B.1.2	Bemerkung: spezielle Kozykel	90
B.1.3	Definition: getwistetes kovariantes System	90
B.1.4	Definition: getwistetes verschränktes Produkt	91
B.1.5	Bemerkung: Abhängigkeit vom Repräsentanten	91
B.1.6	Definition und Hilfssatz: reduziertes getwistetes verschränktes Produkt . . .	92
B.1.7	Bemerkung: Abhängigkeit von der Darstellung	92
B.2	Getwistete Gruppen-C^*-Algebren	93
B.2.1	Definition: Getwistete Gruppen- C^* -Algebren	93
B.2.2	Definition und Hilfssatz: kanonische Spur	94
B.2.3	Hilfssatz: GNS-Darstellung der reduzierten getwisteten Gruppenalgebra . . .	94
B.2.4	Hilfssatz: Kommutant	95
B.3	Twistäquivalente KK-Theorie	96
B.3.1	Definition: Hilbert- $(\mathcal{B}, \beta, G, \theta)$ -Modul	96
B.3.2	Bemerkung: Aktion auf den Moduloperatoren	96
B.3.3	Definition: Kasparov- (G, θ', θ) -Moduln	96
B.3.4	Definition und Hilfssatz: getwistetes verschränktes Produkt von Hilbertmoduln	97

B.3.5	Theorem: $KK_{G,\theta',\theta}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow KK(\cdot \times_{\mathcal{A},\theta'} G, \cdot \times_{\mathcal{B},\theta} G)$	99
B.4	Beispiele	99
B.4.1	Beispiel: Rotationsalgebra	99
B.4.2	Theorem: Eigenschaften der Rotationsalgebra	100
B.4.3	Theorem: getwistete Fuchssche Gruppen	100

B.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir beginnen mit der Definition der Gruppenkohomologie nach Brown (1994).

B.1.1 Definition (Gruppenkozyklus)

Sei G eine Gruppe und R eine abelsche Gruppe mit G -Aktion, d. h. mit einem Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(R)$. Die **R -wertigen n -Koketten** auf G sind definiert als $C^n(G, R) = \{f : G^n \rightarrow R\}$. Das Kodifferential $\delta f \in C^n(G, R)$ ist für $f \in C^{n-1}(G, R)$ definiert durch

$$(\delta f)(g_1, \dots, g_n) = \alpha_{g_1}[f(g_2, \dots, g_n)] - f(g_1 g_2, g_3, \dots, g_n) \pm \dots \\ + (-1)^{n-1} f(g_1, \dots, g_{n-2}, g_{n-1} g_n) + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}). \quad (\text{B.1.1})$$

Eine Kokette $f \in C^n(G, R)$ heißt **normiert**, falls $f(g_1, \dots, g_n) = 0$ ist, sobald $g_i = e$ für ein i . Die **Kozykel $Z^n(G, R)$** sind die Koketten mit verschwindendem Kodifferential, die **Koränder** das Bild $B^n(G, R)$ von $\delta|C^{n-1}(G, R)$. Die **Gruppenkohomologie** ist die Kohomologie des Komplexes $(C^*(G, R), \delta)$.

B.1.2 Bemerkung (spezielle Kozykel)

1. Jede Klasse besitzt einen normierten Repräsentanten.
2. Bewegt man sich in der Kategorie lokal kompakter topologischer Gruppen, so fordert man von den Koketten Stetigkeit oder Borelmeßbarkeit. Diese Eigenschaften bleiben unter dem Kodifferential erhalten.

B.1.3 Definition (getwistetes kovariantes System)

Ein **getwistetes kovariantes System** $(\mathcal{A}, G, \alpha, \theta)$ besteht aus einer C^* -Algebra \mathcal{A} , einer lokal kompakten Gruppe G , einem stetigen Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$ und einem normierten Borel-2-Kozyklus $\theta \in Z^2(G, \mathcal{U}\mathcal{Z}\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ auf G mit Werten in den unitären zentralen Multipliern von \mathcal{A} , wobei die G -Aktion auf \mathcal{A} die G -Aktion auf $\mathcal{U}\mathcal{Z}\mathcal{M}(\mathcal{A})$ induziert.

B.1.4 Definition (getwistetes verschränktes Produkt)

Für ein getwistetes kovariantes System $(\mathcal{A}, G, \alpha, \theta)$ sei $L^1(G, \mathcal{A})$ der Banachraum der (bezüglich des Haarmaßes) integrierbaren \mathcal{A} -wertigen Funktion auf G . Wir versehen $L^1(G, \mathcal{A})$ mit der Struktur einer Banach- $*$ -Algebra $L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta)$ durch

$$f_1 \star f_2(g) := \int_G f_1(h) \alpha_h[f_2(h^{-1}g)] \theta(h, h^{-1}g) dh, \quad (\text{B.1.2})$$

$$f^*(g) := \overline{\theta(g, g^{-1}) \alpha_g[f(g^{-1})]^* \Delta_G(g^{-1})} \quad (\text{B.1.3})$$

für $f, f_1, f_2 \in L^1(G, \mathcal{A})$, $g \in G$. Δ_G bezeichnet hier die Modulfunktion von G , dh das (Links-)Haarmaß.

Ist \mathcal{A} separabel und erfüllt G das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so besitzt $L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta)$ nach Leptin (1967) und Packer & Raeburn (1990) eine zweiseitige beschränkte Fasteins und somit eine einhüllende C^* -Algebra, die wir als **getwistetes verschränktes Produkt** $\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta} G$ bezeichnen.

B.1.5 Bemerkung (Abhängigkeit vom Repräsentanten)

Ersetzt man θ durch einen äquivalenten Kozyklus $\tilde{\theta} = \theta \delta \chi$ mit $\chi \in C^1(G, \mathcal{U}\mathcal{Z}\mathcal{M}(\mathcal{A}))$, also

$$\tilde{\theta}(g_1, g_2) = \theta(g_1, g_2) \alpha_{g_1}[\chi(g_2)] \chi(g_1 g_2)^{-1} \chi(g_1),$$

so ist χ normiert ($\chi(e) = 1$)), da θ und $\tilde{\theta}$ nach Voraussetzung normiert sind, und

$$L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \tilde{\theta}) \ni f \mapsto \chi f \in L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta)$$

definiert einen $*$ -Isomorphismus wegen

$$\begin{aligned} f_1 \star_{\tilde{\theta}} f_2(g) &= \int_G f_1(h) \alpha_h[f_2(h^{-1}g)] \theta(h, h^{-1}g) \alpha_h[\chi(h^{-1}g)] \chi(g)^{-1} \chi(h) dh \\ &= \chi(g)^{-1} \int_G \chi(h) f_1(h) \alpha_h[\chi(h^{-1}g) f_2(h^{-1}g)] \theta(h, h^{-1}g) dh \\ &= \chi(g)^{-1} (\chi f_1) \star_{\theta} (\chi f_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f^{*\tilde{\theta}}(g) &= \overline{\theta(g, g^{-1}) \alpha_g[\chi(g^{-1})] \chi(e)^{-1} \chi(g) \alpha_g[f(g^{-1})]^* \Delta_G(g^{-1})} \\ &= \chi(g)^{-1} \overline{\theta(g, g^{-1}) \alpha_g[\chi(g^{-1}) f(g^{-1})]^* \Delta_G(g^{-1})} \\ &= \chi(g)^{-1} (\chi f)^{*\theta}(g). \end{aligned}$$

Dieser $*$ -Isomorphismus erzeugt dann einen Isomorphismus der einhüllenden C^* -Algebren.

B.1.6 Definition und Hilfssatz (reduziertes getwistetes verschränktes Produkt)

Sei $(\mathcal{A}, G, \alpha, \theta)$ ein getwistetes kovariantes System und ρ eine treue Darstellung von \mathcal{A} auf dem Hilbertraum \mathcal{H} . Wir definieren eine Darstellung $\tilde{\rho}$ von $L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta)$ auf $L^2(G) \otimes \mathcal{H} \simeq L^2(G, \mathcal{H})$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(f)(x)(g) &:= \int_G \rho(\alpha_g[f(h)]\theta(g, h))x(gh)\sqrt{\Delta_G(h)}dh, \\ f &\in L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta), \\ x &\in L^2(G, \mathcal{H}), g \in G. \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

Das **reduzierte getwistete verschränkte Produkt** $\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta, r} G$ ist definiert als die C^* -Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(G, \mathcal{H}))$, die von $\tilde{\rho}(L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta))$ erzeugt wird.

Beweis Für $f_1, f_2 \in L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta), x \in L^2(G, \mathcal{H}), g \in G$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(f_1)\tilde{\rho}(f_2)(x)(g) &= \int_G \rho\{\alpha_g[f_1(h')]\theta(g, h')\}[\tilde{\rho}(f_2)(x)](gh')\sqrt{\Delta_G(h')}dh' \\ &= \int_G \rho\{\alpha_g[f_1(h')]\theta(g, h')\} \int_G \rho\{\alpha_{gh'}[f_2(h)]\theta(gh', h)\}x(gh'h)\sqrt{\Delta_G(h)}dh\sqrt{\Delta_G(h')}dh' \\ &= \int_G \rho\{\alpha_g[f_1(h')]\theta(g, h')\} \int_G \rho\{\alpha_{gh'}[f_2(h'^{-1}h)]\theta(gh', h'^{-1}h)\}x(gh)\sqrt{\Delta_G(h'^{-1}h)}dh \\ &\quad \sqrt{\Delta_G(h')}dh' \\ &= \int_G \rho\left\{\alpha_g\left[\int_G f_1(h')\alpha_{h'}[f_2(h'^{-1}h)]\right]\theta(g, h')\theta(gh', h'^{-1}h)\right\}dh'x(gh)\sqrt{\Delta_G(h)}dh \\ &= \int_G \rho\left\{\alpha_g\left[\int_G f_1(h')\alpha_{h'}[f_2(h'^{-1}h)]\theta(h', h'^{-1}h)dh'\right]\theta(g, h)\right\}x(gh)\sqrt{\Delta_G(h)}dh \\ &= \int_G \rho\{\alpha_g[(f_1 \star f_2)(h)]\theta(g, h)\}x(gh)\sqrt{\Delta_G(h)}dh \\ &= \tilde{\rho}(f_1 \star f_2)(x)(g) \end{aligned}$$

Hier wurde außer den Definitionen und der Darstellungseigenschaft von ρ nur die Kozykluseigenschaft

$$\theta(g, h')\theta(gh', h'^{-1}h) = \alpha_g[\theta(h', h'^{-1}h)]\theta(g, h)$$

benutzt. Ebenso überprüft man $\tilde{\rho}(f^*) = \tilde{\rho}(f)^*$.

B.1.6

B.1.7 Bemerkung (Abhängigkeit von der Darstellung)

Nach Quigg (1986) ist $\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta, r} G$ bis auf $*$ -Isomorphie eindeutig bestimmt, unabhängig von der Wahl einer treuen Darstellung. $\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta, r} G$ läßt sich auch konstruieren als der Abschluß von $L^1(G, \mathcal{A}, \alpha, \theta)$ unter der C^* -Norm

$$\|f\|_r = \sup\{\|\tilde{\rho}(f)\| \mid \rho \text{ treue Darstellung von } \mathcal{A}\}.$$

Der $*$ -Isomorphismus aus B.1.5 auf der vorhergehenden Seite erzeugt wiederum einen Isomorphismus der entsprechenden C^* -Algebren.

B.2 Getwistete Gruppen- C^* -Algebren

B.2.1 Definition (Getwistete Gruppen- C^* -Algebren)

Sei G eine lokal kompakte Gruppe und $\theta \in Z^2(G, S^1)$ ein normierter Borelkozyklus. Die (reduzierte) getwistete Gruppen- C^* -Algebra $C_r^*(G, \theta)$ ist das (reduzierte) getwistete ver-schränkte Produkt $\mathbb{C} \times_{\text{id}, \theta(r)} G$, wobei G auf \mathbb{C} trivial operiert und für das reduzierte Produkt die identische Darstellung von \mathbb{C} auf \mathbb{C} verwendet wird.

(B.1.4) zeigt, daß die reduzierten getwisteten Gruppen- C^* -Algebren gerade der getwisteten rechtsregulären Darstellung von G auf $L^2(G)$ entsprechen und $L^1(G, \mathbb{C}, \text{id}, \theta)$ die getwistete Faltungsalgebra ist.

Im folgenden sei Γ eine diskrete Gruppe. Dann verschwindet die modulare Funktion, und Γ ist eingebettet in $l^1(\Gamma, \mathbb{C}, \text{id}, \theta)$ durch die Diracfunktionen

$$\delta_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \gamma = \gamma', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Γ ist damit total in $C_r^*(\Gamma, \theta)$, da Γ total in $l^1(\Gamma)$ bezüglich der l^1 -Norm ist. In der Darstellung (B.1.4) auf $l^2(\Gamma)$ wird $C_r^*(\Gamma, \theta)$ folglich erzeugt von den getwisteten Rechtstranslationen

$$\begin{aligned} R_\gamma^\theta : l^2(\Gamma) \ni f &\mapsto R_\gamma^\theta f \in l^2(\Gamma), \\ R_\gamma^\theta f(\gamma') &= \tilde{\rho}(\delta_\gamma)(f)(\gamma') \\ &= \theta(\gamma', \gamma) f(\gamma'\gamma), \end{aligned} \tag{B.2.1}$$

so daß

$$\begin{aligned} R_\gamma^\theta R_{\gamma'}^\theta &= \tilde{\rho}(\delta_\gamma) \tilde{\rho}(\delta_{\gamma'}) \\ &= \tilde{\rho}(\delta_\gamma \star \delta_{\gamma'}) \\ &= \theta(\gamma, \gamma') \tilde{\rho}(\delta_{\gamma\gamma'}) \\ &= \theta(\gamma, \gamma') R_{\gamma\gamma'}^\theta, \end{aligned}$$

da nach (B.1.2) gilt: $\delta_\gamma \star \delta_{\gamma'} = \theta(\gamma, \gamma') \delta_{\gamma\gamma'}$.

Ist $f \in l^1(\Gamma)$, $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \delta_\gamma$, beliebig, so ist $\tilde{\rho}(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) R_\gamma^\theta$. Da $(\delta_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ eine Orthonormalbasis von $l^2(\Gamma)$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{\rho}(f)\|_{\mathcal{L}(l^2(\Gamma))} &\geq \|\tilde{\rho}(f) \delta_e\|_{l^2(\Gamma)} \\ &= \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) R_\gamma^\theta \delta_e \right\|_{l^2(\Gamma)} \\ &= \left\| \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \theta(\gamma^{-1}, \gamma) \delta_{\gamma^{-1}} \right\|_{l^2(\Gamma)} \\ &= \|f\|_{l^2(\Gamma)}, \end{aligned} \tag{B.2.2}$$

so daß wir die Einbettungen von Banachräumen $l^1(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{\subset} C_r^*(\Gamma, \theta) \subset l^2(\Gamma)$ haben.

B.2.2 Definition und Hilfssatz (kanonische Spur)

Durch

$$\tau : l^1(\Gamma, \mathbb{C}, \text{id}, \theta) \ni f \mapsto f(e) \in \mathbb{C} \quad (\text{B.2.3})$$

definieren wir eine Spur auf $L^1(\Gamma, \mathbb{C}, \text{id}, \theta)$, die sich durch Stetigkeit fortsetzt auf $C_r^*(\Gamma, \theta)$. τ ist treu. Ist Γ abelsch, so ist

$$\tau(f) = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{f}(\chi) d\chi \quad (\text{B.2.4})$$

und stimmt daher mit der Spur in 2.2.2 auf Seite 22 überein.

Beweis Nach (B.1.2) ist

$$\begin{aligned} f_1 \star f_2(e) &= \sum_{h \in \Gamma} f_1(h) f_2(h^{-1}) \theta(h, h^{-1}) \\ &= \sum_{h \in \Gamma} f_2(h) f_1(h^{-1}) \theta(h, h^{-1}) \\ &= f_2 \star f_1(e). \end{aligned}$$

Linearität und Additivität folgen unmittelbar. Die Stetigkeit ergibt sich aus

$$\begin{aligned} f(e) &= \langle \delta_e | f \rangle_{l^2(\Gamma)} \\ &= \langle \delta_e | \tilde{\rho}(f)(\delta_e) \rangle_{l^2(\Gamma)} \\ &\leq \| \tilde{\rho}(f) \|_{\mathcal{L}(l^2(\Gamma))}, \end{aligned}$$

da $\tilde{\rho}(f)(\delta_e)(\gamma) = f(\gamma^{-1}) \theta(\gamma, \gamma^{-1})$ ist.

Wegen

$$\begin{aligned} \tau(\tilde{\rho}(f)^* \tilde{\rho}(f)) &= f^* \star f(e) \\ &= \sum_{h \in \Gamma} \overline{\theta(h, h^{-1})} f(h^{-1})^* f(h^{-1}) \theta(h, h^{-1}) \\ &= \sum_{h \in \Gamma} f(h)^* f(h) \\ &= \|f\|_{l^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

ist τ treu auf $l^1(\Gamma) \subset l^2(\Gamma)$. Aus (B.2.2) folgt, daß τ auch auf $C_r^*(\Gamma, \theta)$ treu ist.

Ist Γ abelsch, so ist $f(e) = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{f}$ nach (2.1.20) auf Seite 19.

B.2.2

B.2.3 Hilfssatz (GNS-Darstellung der reduzierten getwisteten Gruppenalgebra)

Die GNS-Darstellung der reduzierten getwisteten Gruppenalgebra bezüglich der kanonischen Spur ist die getwistete linksreguläre Darstellung auf $l^2(\Gamma)$ zum Kozyklus $\bar{\theta}$.

Beweis Wie schon im Beweis von B.2.2 bemerkt ist $\tau(f^*f) = \|f\|_{l^2(\Gamma)}^2$ für $f \in l^1(\Gamma)$. Außerdem ist $l^1(\Gamma) \subset C_r^*(\Gamma, \theta)$ nach Definition und $C_r^*(\Gamma, \theta) \subset l^2(\Gamma)$. Da $l^1(\Gamma) \subset l^2(\Gamma)$ dicht ist, ist der entsprechende GNS-Darstellungsraum $l^2(\Gamma)$.

Sind $a, f \in l^1(\Gamma)$, so ist nach Definition der GNS-Darstellung ρ_τ

$$\begin{aligned}\rho_\tau(a)f &= \tilde{\rho}(a)\tilde{\rho}(f) \\ &= \tilde{\rho}(a \star f).\end{aligned}$$

Für die Erzeugenden gilt jedoch

$$\begin{aligned}(\delta_\gamma \star f)(\gamma') &= \theta(\gamma, \gamma^{-1}\gamma')f(\gamma^{-1}\gamma') \\ &= \theta(\gamma, \gamma^{-1})\bar{\theta}(\gamma^{-1}, \gamma')f(\gamma^{-1}\gamma') \\ &=: \theta(\gamma, \gamma^{-1})(L_\gamma^{\bar{\theta}}f)(\gamma')\end{aligned}$$

und analog

$$(f \star \delta_\gamma)(\gamma') = \theta(\gamma^{-1}, \gamma)(R_\gamma^{\bar{\theta}}f)(\gamma').$$

Da τ und damit die GNS-Darstellung treu ist, folgt, daß $C_r^*(\Gamma, \theta)$ isomorph zu $C_r^*(\Gamma, \bar{\theta})^L$ ist, der von den mit $\bar{\theta}$ getwisteten Linkstranslationen $L_\gamma^{\bar{\theta}}, \gamma \in \Gamma$, in $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ erzeugten C^* -Algebra. B.2.3

B.2.4 Hilfssatz (Kommutant)

Der Kommutant von $C_r^*(\Gamma, \theta)$ in $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ ist die W^* -Algebra $W_r^*(\Gamma, \theta)^L$, die von den getwisteten Linkstranslationen $L_\gamma^\theta, \gamma \in \Gamma$, in $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$ erzeugt wird.

Beweis Via GNS-Darstellung ist $C_r^*(\Gamma, \theta) \simeq C_r^*(\Gamma, \bar{\theta})^L$. Da Kommutanten schwach abgeschlossen sind, können wir gemäß A.3 auf Seite 87 (Tomita-Takesaki-Isomorphismus) folgern:

$$\begin{aligned}(C_r^*(\Gamma, \theta))' &\stackrel{\text{GNS}}{\simeq} (C_r^*(\Gamma, \bar{\theta})^L)' \\ &\simeq (W_r^*(\Gamma, \bar{\theta})^L)' \\ &\stackrel{\text{A.3}}{\simeq} W_r^*(\Gamma, \bar{\theta})^{L, op} \\ &\simeq W_r^*(\Gamma, \bar{\theta}) \\ &\simeq W_r^*(\Gamma, \theta)^L\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt wiederum B.2.3 benutzt¹. Die Gleichheit $W_r^*(\Gamma, \bar{\theta})^{L, op} \simeq W_r^*(\Gamma, \bar{\theta})$ folgt, da das Umdrehen op des Produkts auf der Faltungsalgebra Links- und Rechtsfaltung und damit, wie wir im vorigen Beweis gesehen haben, Links- und Rechtstranslationen (zum selben Twist) ineinander überführt. B.2.4

¹Genauer: $W^*(\text{B.2.3})$

B.3 Twistäquivalente KK-Theorie

In diesem Abschnitt folgen wir der Darstellung der äquivalenten KK-Theorie in (Blackadar, 1986, Kapitel 20) und erweitern sie für den twistäquivalenten Fall.

B.3.1 Definition (Hilbert- $(\mathcal{B}, \beta, G, \theta)$ -Modul)

Sei $(\mathcal{B}, \beta, G, \theta)$ ein getwistetes kovariantes System und E ein Hilbert- \mathcal{B} -Modul. Eine **stetige getwistete G -Aktion** auf E ist eine Abbildung $\gamma : G \rightarrow \mathcal{L}(E)^\times$ in die invertierbaren beschränkten linearen Abbildungen auf E , die stetig in der starken Operatortopologie und ein getwisteter Homomorphismus ist, d. h.

$$\gamma_g \gamma_h = \theta(g, h) \gamma_{gh} \text{ für } g, h \in G, \quad (\text{B.3.1})$$

und die kovariant ist zur G -Aktion auf \mathcal{B} , d. h.

$$\gamma_g [xb] = \gamma_g [x] \beta_g [b] \text{ für } x \in E, b \in \mathcal{B}, g \in G, \quad (\text{B.3.2})$$

$$\beta_g [\langle x|y \rangle] = \langle \gamma_g [x] | \gamma_g [y] \rangle \text{ für } x, y \in E, g \in G. \quad (\text{B.3.3})$$

Ein Hilbert- \mathcal{B} -Modul mit getwisteter stetiger G -Aktion heißt **Hilbert- $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ -Modul**.

B.3.2 Bemerkung (Aktion auf den Moduloperatoren)

Wie im ungetwisteten Fall gibt es für zwei Hilbert- $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ -Moduln $(E_1, \gamma_1), (E_2, \gamma_2)$ eine stetige G -Aktion auf den adjungierbaren Moduloperatoren $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E_1, E_2)$ und auf den kompakten $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(E_1, E_2)$: Für $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E_1, E_2)$ definieren wir

$$(g[B])(e) := \gamma_{2,g} [B \gamma_{1,g}^{-1} [e]] \text{ für } g \in G, e \in E_1.$$

Da γ_1 und γ_2 kovariant zu β sind, bleibt B ein \mathcal{B} -Moduloperator (B.3.2) und adjungierbar (B.3.3). Wie im ungetwisteten Fall nennen wir B **G -stetig**, falls die Abbildung $g \mapsto g[B]$ normstetig ist. Ebenso übersetzt sich der Begriff einer G -invarianten Graduierung.

B.3.3 Definition (Kasparov- (G, θ', θ) -Moduln)

$(\mathcal{A}, G, \alpha, \theta')$ und $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ seien zwei graduierte getwistete kovariante Systeme. Die Menge $\text{Ell}_{G, \theta', \theta}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ der **Kasparov- (G, θ', θ) -Moduln** ist definiert als die Menge aller Tripel (E, ϕ, F) mit folgenden Eigenschaften:

1. E ist ein Hilbert- $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ -Modul,
2. $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E)$ ist ein äquivarianter $(\phi(\alpha_\gamma [a]) = \gamma[\Phi(a)])$ graduierter $*$ -Homomorphismus mit² $\phi(\theta') = \theta \mathbb{1}_E$,
3. F ist ein G -stetiger Operator in $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E)$ vom Grad 1, so daß $[F, \phi(a)], (F^2 - 1)\phi(a), (F - F^*)\phi(a)$ und $(g[F] - F)\phi(a) \in \mathcal{K}_{\mathcal{B}}(E)$ für alle $a \in \mathcal{A}, g \in G$.

²Da $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E)$ die Multiplialgebra von $\mathcal{K}_{\mathcal{B}}(E)$ ist, ist $\lambda \mathbb{1}_E \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(E)$ für $\lambda \in \mathcal{U} \mathcal{Z} \mathcal{M}(\mathcal{B})$.

Mit dieser Definition übertragen sich sowohl die Kasparovgruppen und als auch die Konstruktion des Schnittprodukts direkt aus dem ungetwisteten Fall. Der Twist spielt erst wieder beim Zusammenhang der Kasparovgruppen mit den verschränkten Produkten eine Rolle:

B.3.4 Definition und Hilfssatz (getwistetes verschränktes Produkt von Hilbertmoduln)

Sei $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ ein getwistetes kovariantes System und E ein Hilbert- \mathcal{B} -Modul. Dann operiert $f \in C_c(G, \mathcal{B})$ auf $x \in C_c(G, E)$ via

$$(xf)(g) = \int_G x(h) \beta_h[f(h^{-1}g)] \theta(h, h^{-1}g) dh \text{ für } g \in G. \quad (\text{B.3.4})$$

Ein $C_c(G, \mathcal{B})$ -wertiges Skalarprodukt wird definiert durch

$$\langle x|y \rangle(g) = \int_G \beta_{h^{-1}} [\langle x(h)|y(hg) \rangle_E] \theta(h^{-1}, hg) \overline{\theta(h^{-1}, h)} dh \text{ für } x, y \in C_c(G, E). \quad (\text{B.3.5})$$

Die Vervollständigung bezüglich dieses Skalarproduktes ist ein Hilbert- $\mathcal{B} \rtimes_{\beta, \theta} G$ -Modul und wird mit $E \rtimes_{\beta, \theta} G$ bezeichnet.

Beweis $C_c(G, E)$ wird ein $C_c(G, \mathcal{B})$ -Modul: Für $x \in C_c(G, E)$, $f_1, f_2 \in C_c(G, \mathcal{B})$ gilt:

$$\begin{aligned} ((xf_1)f_2)(g) &= \int_G (xf_1)(h') \beta_{h'}[f_2(h'^{-1}g)] \theta(h', h'^{-1}g) dh' \\ &= \int_G \int_G x(h) \beta_h[f_1(h^{-1}h')] \theta(h, h^{-1}h') dh \beta_{h'}[f_2(h'^{-1}g)] \theta(h', h'^{-1}g) dh' \\ &= \int_G \int_G x(h) \beta_h \{ f_1(h') \beta_{h'}[f_2(h'^{-1}h^{-1}g)] \} \theta(h, h') \theta(hh', h'^{-1}h^{-1}g) dh' dh \\ &= \int_G x(h) \beta_h \left\{ \int_G f_1(h') \beta_{h'}[f_2(h'^{-1}h^{-1}g)] \theta(h', h'^{-1}h^{-1}g) dh' \right\} \theta(h, h^{-1}g) dh \\ &= \int_G x(h) \beta_h[(f_1 \star f_2)(h^{-1}g)] \theta(h, h^{-1}g) dh \end{aligned}$$

Hier wurde neben den Definitionen die Kozyklusrelation

$$\theta(h, h') \theta(hh', h'^{-1}h^{-1}g) = \beta_h[\theta(h', h'^{-1}h^{-1}g)] \theta(h, h^{-1}g)$$

benutzt.

Als nächstes überprüfen wir für $x, y \in C_c(G, E)$, $f \in C_c(G, \mathcal{B})$ die $C_c(G, \mathcal{B})$ -Linearität des

Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
\langle x|yf \rangle(g) &= \int_G \beta_{h^{-1}} (\langle x(h)|y(f)(hg) \rangle_E) \theta(h^{-1}, hg) \overline{\theta(h^{-1}, h)} dh \\
&= \int_G \beta_{h^{-1}} \left\{ \int_G \langle x(h)|y(h') \rangle_E \beta_{h'} [f(h'^{-1}hg)] \theta(h', h'^{-1}hg) dh' \right\} \theta(h^{-1}, hg) \overline{\theta(h^{-1}, h)} dh \\
&= \int_G \int_G \beta_{h^{-1}} [\langle x(h)|y(h') \rangle_E] \theta(h^{-1}, h') \beta_{h^{-1}h'} [f(h'^{-1}hg)] \theta(h^{-1}h', h'^{-1}hg) dh' \\
&\quad \overline{\theta(h^{-1}, h)} dh \\
&= \int_G \int_G \beta_{h^{-1}} [\langle x(h)|y(hh') \rangle_E] \theta(h^{-1}, hh') \beta_{h'} [f(h'^{-1}g)] \theta(h', h'^{-1}g) dh' \overline{\theta(h^{-1}, h)} dh \\
&= \int_G \langle x|y \rangle(h') \beta_{h'} [f(h'^{-1}g)] \theta(h', h'^{-1}g) dh' \\
&= (\langle x|y \rangle f)(g)
\end{aligned}$$

Hierfür wurde die Kozyklusbedingung

$$\beta_{h^{-1}} [\theta(h', h'^{-1}hg)] \theta(h^{-1}, hg) = \theta(h^{-1}, h') \theta(h^{-1}h', h'^{-1}hg)$$

benutzt.

Um die Sesquilinearität zu zeigen, müssen wir – neben der Normierung $\theta(g, e) = 1$ – die Kozyklusbedingung zweimal verwenden:

$$\begin{aligned}
\beta_g [\theta(g^{-1}h^{-1}, hg)] \theta(h^{-1}, h) &= \beta_g [\theta(g^{-1}h^{-1}, hg)] \theta(g, e) \theta(h^{-1}, h) \\
&= \theta(g, g^{-1}h^{-1}) \theta(h^{-1}, hg) \theta(h^{-1}, h) \\
&= \beta [\theta(g^{-1}h^{-1}, h)] \theta(g, g^{-1}) \theta(h^{-1}, hg)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\langle y|x \rangle^*(g) &= \overline{\theta(g, g^{-1})} \beta_g [\langle y|x \rangle(g^{-1})]^* \Delta_G(g^{-1}) \\
&= \overline{\theta(g, g^{-1})} \int_G \beta_g \left\{ \beta_{h^{-1}} [\langle y(h)|x(hg^{-1}) \rangle_E]^* \overline{\theta(h^{-1}, hg^{-1})} \theta(h^{-1}, h) \right\} \Delta(g^{-1}) dh \\
&= \overline{\theta(g, g^{-1})} \int_G \beta_{gh^{-1}} [\langle x(hg^{-1})|y(h) \rangle_E]^* \beta_g [\overline{\theta(h^{-1}, hg^{-1})} \theta(h^{-1}, h)] \Delta(g^{-1}) dh \\
&= \overline{\theta(g, g^{-1})} \int_G \beta_{h^{-1}} [\langle x(h)|y(hg) \rangle_E]^* \beta_g [\overline{\theta(g^{-1}h^{-1}, h)} \theta(g^{-1}h^{-1}, hg)] dh \\
&= \int_G \beta_{h^{-1}} [\langle x(h)|y(hg) \rangle_E]^* \theta(h^{-1}, hg) \overline{\theta(h^{-1}, h)} dh \\
&= \langle x|y \rangle(g)
\end{aligned}$$

Sei nun $(E, \phi, F) \in \text{Ell}_{G, \theta', \theta}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. ϕ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : \mathcal{A} \times_{\alpha, \theta} G &\rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times_{\beta, \theta} G}(E \times_{\beta, \theta} G), \\ (\tilde{\phi}(a))(x)(g) &= \int_G (\phi(a(h))\gamma_h[x(h^{-1}g)]\theta(h, h^{-1}g)) dh\end{aligned}$$

für $a \in C_c(G, \mathcal{A})$, $x \in C_c(G, E)$, $g \in G$. $\tilde{\phi}$ ist ein Homomorphismus nach $\mathcal{L}(E \times_{\beta, \theta} G)$: Für $a_1, a_2 \in C_c(G, \mathcal{A})$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(a_1 \star a_2)(x)(g) &= \int_G \phi(a_1 \star a_2)(h')\gamma_{h'}[x(h'^{-1}g)]\theta(h', h'^{-1}g) dh' \\ &= \int_G \phi \left(\int_G a_1(h)\alpha_h[a_2(h^{-1}h')] \theta'(h, h^{-1}h') dh \right) \gamma_{h'}[x(h'^{-1}g)]\theta(h', h'^{-1}g) dh' \\ &= \int_G \int_G \phi(a_1(h))h[\Phi](a_2(h^{-1}h'))\theta(h, h^{-1}h')\gamma_{h'}[x(h'^{-1}g)]\theta(h', h'^{-1}g) dh' dh \\ &= \int_G \int_G \phi(a_1(h))h[\Phi](a_2(h'))\gamma_{hh'}[x(h'^{-1}h^{-1}g)]\theta(h, h')\theta(hh', h'^{-1}h^{-1}g) dh' dh \\ &= \int_G \int_G \phi(a_1(h))\gamma_h[\Phi(a_2(h'))\gamma_h^{-1}[\gamma_{hh'}[x(h'^{-1}h^{-1}g)]]]\beta_h[\theta(h', h'^{-1}g)]\theta(h, h^{-1}g) dh' dh \\ &= \int_G \phi(a_1(h))\gamma_h \left[\int_G \Phi(a_2(h'))\gamma_{h'}[x(h'^{-1}h^{-1}g)]\theta(h', h'^{-1}h^{-1}g) dh' \right] \theta(h, h^{-1}g) dh \\ &= \tilde{\phi}(a_1)\tilde{\phi}(a_2)(x)(g).\end{aligned}$$

Die *-Eigenschaft ergibt sich wie (B.1.3). Daß $\tilde{\phi}$ tatsächlich nach $\mathcal{L}_{\mathcal{B} \times_{\beta, \theta} G}(E \times_{\beta, \theta} G)$ abbildet, folgt daraus, daß E ein Hilbert- $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ -Modul ist (Kovarianz und Twist).

$(\tilde{F}x)(g) = F(x(g))$ definiert ein Element $\tilde{F} \in \mathcal{L}_{\mathcal{B} \times_{\beta, \theta} G}(E \times_{\beta, \theta} G)$, dessen Elliptizität wie im ungetwisteten Fall aus der von F und der G -Stetigkeit folgt. Daher haben wir schließlich eine Abbildung

$$\begin{aligned}j_{G, \theta', \theta} : \text{Ell}_{G, \theta', \theta}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\rightarrow \text{Ell}(\mathcal{A} \times_{\alpha, \theta'} G, \mathcal{B} \times_{\beta, \theta} G) \\ (E, \phi, F) &\mapsto (E \times_{\beta, \theta} G, \tilde{\phi}, \tilde{F})\end{aligned}$$

haben. Wie im ungetwisteten Fall folgt

B.3.5 Theorem ($KK_{G, \theta', \theta}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow KK(\cdot \rtimes_{\mathcal{A}, \theta'} G, \cdot \rtimes_{\mathcal{B}, \theta} G)$)

$j_{G, \theta', \theta}$ induziert einen Homomorphismus auf den Kasparovgruppen, der funktoriell in \mathcal{A} und \mathcal{B} und kompatibel mit dem Schnittprodukt ist.

B.4 Beispiele

B.4.1 Beispiel (Rotationsalgebra)

Wegen $H^2(\mathbb{Z}^2, S^1) \simeq S^1$ ist jede Klasse Θ charakterisiert durch eine Zahl $e^{2\pi i \theta} \in S^1$. Die zugehörige getwistete Gruppen- C^* -Algebra $\mathcal{A}_\theta = C^*(\mathbb{Z}^2, \Theta)$ heißt **Rotationsalgebra**. Es gilt dann:

B.4.2 Theorem (Eigenschaften der Rotationsalgebra)

1. Ist $\theta = p/q$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd, so ist die Kadisonkonstante von \mathcal{A}_θ und von $\mathcal{A}_\theta \otimes \mathcal{K}$ gerade $1/q$.
2. Ist θ irrational, so haben \mathcal{A}_θ und $\mathcal{A}_\theta \otimes \mathcal{K}$ reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand.

Beweis

1. Das Spektrum von \mathcal{A}_θ ist T^2 , die irreduziblen Darstellungen $\pi_z, z \in T^2$, sind alle q -dimensional, die kanonische Spur von $a \in \mathcal{A}_\theta$ ist

$$\tau(a) = \frac{1}{q} \int_{T^2} \text{tr} \pi_z(a) dz$$

mit dem normierten Haarmaß dz auf T^2 und der gewöhnlichen Spur tr auf $M(q, \mathbb{C})$, so daß $\tau(\mathbb{1}) = 1$ (siehe z. B. Gruber, 1994, Abschnitt 4.1 für diese bekannten Eigenschaften). Bezüglich τ minimale Projektionen p erhält man offensichtlich, wenn $\pi_z(p)$ vom Rang 1 ist, so daß $\tau(p) = 1/q$ wird.

2. Für irrationales θ hat \mathcal{A}_θ nach (Elliott & Evans, 1993, Theorem 4) reellen Rang 0. Da \mathcal{A}_θ einfach und nichtelementar ist, folgt aus (Choi & Elliott, 1990, Korollar 8), daß \mathcal{A}_θ und $\mathcal{A}_\theta \otimes \mathcal{K}$ reellen Rang 0 mit infinitesimalem Zustand haben.

B.4.2

Carey et al. (1998) zeigen:

B.4.3 Theorem (getwistete Fuchssche Gruppen)

Sei Σ_g eine riemannsche Fläche vom Geschlecht $g > 0$ und $\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g)$. Dann ist

$$H^2(\Gamma_g, S^1) \simeq H^2(\Sigma_g, S^1) \simeq S^1.$$

Die Isomorphieklassen von reduzierten getwisteten Gruppen- C^* -Algebren $C_r^*(\Gamma_g, \Theta)$ sind parametrisiert durch

$$C_r^*(\Gamma_g, \Theta) \mapsto \langle [\Theta] | [\Sigma_g] \rangle,$$

wobei wir $[\Theta]$ als Element von $H^2(\Sigma_g, G)$ auffassen mit $G = (0, 1] \simeq S^1$. $[\Sigma_g]$ ist die Fundamentalklasse von $[\Sigma_g]$, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ die kanonische Paarung.

Setzen wir $2\pi\theta := \langle [\Theta] | [\Sigma_g] \rangle$ und ist $\theta = p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, so gilt für die Kadisonkonstante C_K von $C_r^*(\Gamma_g, \Theta) \otimes \mathcal{K}$: $C_K \geq 1/q > 0$

Anhang C

Stetige Felder von C^* -Algebren

In diesem Kapitel stellen wir einige Definitionen nach Dixmier & Douady (1963) zusammen. Wir schildern den Zusammenhang zwischen Dixmier-Douady-Invariante und Gruppenkozyklus im Fall getwisteter verschränkter Produkte von Funktionenalgebren.

C.1 Definition und Eigenschaften	102
C.1.1 Definition: stetige Felder von Banach- und Hilberträumen	102
C.1.2 Hilfssatz: definierender Untermodul	102
C.1.3 Lemma: stetige Felder und Banachraumbündel	102
C.1.4 Lemma: stetiges Feld als Hilbert- C^* -Modul	103
C.1.5 Definition: stetige Felder von C^* -Algebren	103
C.1.6 Definition und Hilfssatz: Fell-Bedingung	103
C.2 Dixmier-Douady-Invariante	103
C.2.1 Bemerkung: elementare C^* -Algebren	103
C.2.2 Definition und Hilfssatz: assoziiertes Feld von C^* -Algebren	104
C.2.3 Theorem: Fell-Bedingung und lokale Darstellbarkeit	104
C.2.4 Bemerkung: Dixmier-Douady-Invariante	105
C.2.5 Theorem: Dixmier-Douady-Invariante und globale Darstellung	105
C.2.6 Theorem: $H^3(M, \mathbb{Z})$ und Klassen von C^* -Feldern	105
C.2.7 Theorem: abzählbar unendlichdimensionale Felder	105
C.2.8 Theorem: Dixmier-Douady-Invariante für getwistete dynamische Systeme	105

C.1 Definition und Eigenschaften

C.1.1 Definition (stetige Felder von Banach- und Hilberträumen)

B sei ein topologischer Raum, $(E(z))_{z \in B}$ eine Familie von Banachräumen. Der Vektorraum $\Pi := \prod_{z \in B} E(z)$ heißt **Raum aller Vektorfelder**. Eine **Stetigkeitsstruktur** auf Π ist definiert durch einen Unterraum $\Lambda \subset \Pi$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Λ ist ein Unter- $C_\infty(B)$ -Modul von Π .
2. $\forall_{z \in B} \forall_{\xi \in E(z)} \exists_{x \in \Lambda} x(z) = \xi$
3. $\forall_{x \in \Lambda} (z \mapsto \|x(z)\|) \in C_\infty(B)$
4. $\forall_{x \in \Pi} \langle \forall_{\varepsilon > 0} \forall_{z \in B} \exists_{x' \in \Lambda, \text{Umgebung } U \ni z} \forall_{z' \in U} \|x(z') - x'(z')\| < \varepsilon \rangle \Rightarrow x \in \Lambda$

$\mathcal{E} := ((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$ heißt dann **stetiges Feld von Banachräumen**. Sind die Fasern $E(z)$ alle Hilberträume, so sprechen wir von einem **stetigen Feld von Hilberträumen**. Das Skalarprodukt ist automatisch stetig (Polarisation).

Die etwas unübersichtliche vierte Bedingung an Λ drückt eine Form von Vollständigkeit aus: Ist ein Vektorfeld $x \in \Pi$ lokal beliebig gut approximierbar durch stetige Felder, so ist es stetig.

C.1.2 Hilfssatz (definierender Untermodul)

Seien B, Π wie oben und $\Lambda \subset \Pi$ ein Unterraum mit

1. $\forall_{z \in B} \{x(z) \mid x \in \Lambda\} =: \Lambda(z)$ dicht in $E(z)$ und
2. $\forall_{x \in \Lambda} (z \mapsto \|x\|) \in C_\infty(B)$.

Dann gibt es genau eine Stetigkeitsstruktur $\tilde{\Lambda}$ auf Π mit $\tilde{\Lambda} \supset \Lambda$. $\tilde{\Lambda}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\Lambda} = \{x \in \Pi \mid \forall_{z \in B} \varepsilon > 0 \exists_{\text{Umgebung } U \ni z, x' \in \tilde{\Lambda}} \forall_{z' \in U} \|x(z') - x'(z')\| < \varepsilon\}.$$

C.1.3 Lemma (stetige Felder und Banachraumbündel)

Ein stetiges Feld von Banachräumen \mathcal{E} definiert ein Banachraumbündel¹ E über B , so daß die stetigen Schnitte $C(E)$ gerade die stetigen Felder von \mathcal{E} sind.

Beweisskizze Als Menge ist $E := \prod_{z \in B} E(z)$. Die Topologie wird so gewählt, daß die natürliche Projektion $\pi : E \rightarrow B$ stetig und offen wird: Die Topologie wird erzeugt von Tuben

$$T(U, x, \varepsilon) := \{\xi \in E \mid \pi(\xi) \in U \wedge \|\xi - x(\pi(\xi))\| < \varepsilon\}$$

¹ Ein Bündel muß nur eine stetige offene Surjektion auf die Basis besitzen, ist aber nicht automatisch lokal trivial! Für lokal kompakte Basis und endlichdimensionale Fasern folgt dies jedoch aus der Existenz der Projektion.

für offene Mengen $U \subset B$, stetige Felder $x \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Tubenumgebungen eine Topologie auf E mit den gewünschten Eigenschaften erzeugen. Auf den Fasern $E(z)$ wird die starke Topologie induziert, da die Schnitte $E(z) \cap T(U, x, \varepsilon)$ der Fasern mit den Tuben gerade Normkugeln in den Fasern sind. C.1.3

C.1.4 Lemma (stetiges Feld als Hilbert- C^* -Modul)

Ein stetiges Feld von Hilberträumen $\mathcal{E} = ((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$ über B definiert eine Hilbert- $C_\infty(B)$ -Modulstruktur auf Λ . Umgekehrt definiert ein Hilbert- $C_\infty(B)$ -Modul ein stetiges Feld von Hilberträumen, und diese Korrespondenz ist $1 : 1$.

C.1.5 Definition (stetige Felder von C^* -Algebren)

Ein stetiges Feld von Banachräumen $\mathcal{A} := (A(z))_{z \in B}, \Lambda$ heißt **stetiges Feld von C^* -Algebren**, wenn alle Fasern C^* -Algebren sind und die Stetigkeitsstruktur Λ eine involutive Unteralgebra von $\prod_{z \in B} A(z)$ ist.

C.1.6 Definition und Hilfssatz (Fell-Bedingung)

Ein stetiges Feld von C^* -Algebren $\mathcal{A} := (A(z))_{z \in B}, \Lambda$ erfüllt die **Fell-Bedingung**, falls

$$\forall z \in B \exists \text{ Umgebung } U \ni z, p \in \mathcal{A}|_U \forall z' \in U p(z') \text{ Projektion vom Rang } 1.$$

Man sagt auch: \mathcal{A} hat eine **stetige Spur** (continuous trace).

Besitzen alle Fasern von \mathcal{A} Projektionen vom Rang 1 und ist das Feld \mathcal{A} lokal trivial, so erfüllt \mathcal{A} die Fell-Bedingung.

Beweis Ist \mathcal{A} lokal trivial, so gibt es zu jedem $z \in B$ eine Umgebung U , so daß $\mathcal{A}|_U \simeq A_z \times U$ ist. Wählt man nun eine Projektion $p \in A_z$ vom Rang 1, so ist $z' \mapsto p$ ein stetiges Feld von Projektionen vom Rang 1. □

C.2 Dixmier-Douady-Invariante

C.2.1 Bemerkung (elementare C^* -Algebren)

1. Eine elementare C^* -Algebra ist nach Definition die C^* -Algebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ der kompakten Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . In C.2.2 wird diese Zuordnung faserweise durchgeführt, um ein stetiges Feld von elementaren C^* -Algebren zu erhalten.
2. \mathcal{K} enthält das zweiseitige Ideal \mathcal{L}^2 der Hilbert-Schmidt-Operatoren, welches selbst ein Hilbertraum ist bezüglich der kanonischen Spur. Ist p ein Projektor vom Rang 1, so ist $p\mathcal{K}$ ein abgeschlossener² Unterraum von \mathcal{L}^2 , der tatsächlich isomorph zu \mathcal{H}

²Norm und Spurnorm stimmen überein wegen

$$\|pa\|^2 = \|paa^*p\| = \text{tr}(paa^*p) = \|pa\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

ist. Die Frage, ob diese umgekehrte Zuordnung – faserweise durchgeführt – zu einem stetigen Feld von Hilberträumen führt, wird lokal durch die Fell-Bedingung (C.2.3) und global durch die Dixmier-Douady-Invariante (C.2.5) beantwortet.

3. Etwas vornehmer ausgedrückt ist $p\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Untermodul des trivialen Hilbert- \mathcal{K} -Moduls \mathcal{K} , so daß die GNS-Darstellung zum Zustand tr gerade den ursprünglichen Hilbertraum zurückliefert.
4. Zwei elementare C^* -Algebren sind isomorph genau dann, wenn die zugrundeliegenden Hilberträume isomorph sind; dies ist genau dann der Fall, wenn sie dieselbe Dimension haben. Ein Isomorphismus von Hilberträumen $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ induziert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(\Phi) : \mathcal{K}(\mathcal{H}) &\rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}'), \\ a &\mapsto \Phi a \Phi^{-1}.\end{aligned}$$

Da das Zentrum von \mathcal{K} gerade $\mathbb{C}I$ ist, definieren zwei Hilbertraumisomorphismen Φ_1, Φ_2 denselben C^* -Isomorphismus genau dann, wenn $\Phi_2 = \lambda \Phi_1$ für ein $\lambda \in S^1$.

C.2.2 Definition und Hilfssatz (assoziertes Feld von C^* -Algebren)

Ein stetiges Feld von Hilberträumen $\mathcal{E} = ((E(z))_{z \in B}, \Lambda)$ über B definiert ein **assoziertes stetiges Feld von C^* -Algebren** $\mathcal{A} := (A(z)_{z \in B}, \Pi)$ durch

$$A(z) := \mathcal{K}(E(z)), \quad (\text{C.2.1})$$

$$\Pi := \overline{\text{span}\{\pi_{x,y} \mid x, y \in \Lambda\}}, \text{ wobei} \quad (\text{C.2.2})$$

$$\pi_{x,y}(z)(\xi) := x(z) \langle y(z) | \xi \rangle_{E(z)} \text{ für } z \in B, \xi \in E(z).$$

Der Abschluß in (C.2.2) ist dabei gemäß C.1.2 auf Seite 102 zu verstehen.

Beweis Die erste Bedingung in Hilfssatz C.1.2 ist erfüllt, da die Operatoren mit endlichem Rang dicht in den kompakten sind. Da $\|\pi_{x,y}(z)\| = \|x\| \|y\|$ und ähnlich für die Linearkombinationen, gilt auch die zweite Bedingung. C.2.2

Es stellt sich nun die Frage, ob ein beliebiges Feld von elementaren C^* -Algebren assoziiert ist zu einem stetigen Feld von Hilberträumen.

C.2.3 Theorem (Fell-Bedingung und lokale Darstellbarkeit)

Ein stetiges Feld von elementaren C^* -Algebren ist lokal isomorph zu einem assoziierten Feld eines stetigen Feldes von Hilberträumen genau dann, wenn es die Fell-Bedingung (C.1.6) erfüllt.

Beweisskizze

„ \Leftarrow “ Ist p das lokale Feld von Projektionen vom Rang 1, so definiert $E := p\Lambda|_U$ eine stetige Familie von abgeschlossenen Unterräumen, die nach C.2.1 auf der vorhergehenden Seite gerade $\mathcal{K}(E(z)) = \Lambda(z)$ erfüllen.

„ \Rightarrow “ Ist \mathcal{A} lokal assoziiert zu \mathcal{E} , so wähle man zu $z \in B$ ein nirgends verschwindendes, normiertes Feld x auf einer Umgebung von z_0 . Der zugehörige Projektor $\pi_{x,x}$ erfüllt dann offensichtlich die Fell-Bedingung. C.2.3

C.2.4 Bemerkung (Dixmier-Douady-Invariante)

Für die Untersuchung der globalen Darstellbarkeit setzen wir also die Fell-Bedingung für \mathcal{A} voraus. Weiterhin sei im folgenden die Basis B parakompakt, so daß es eine lokal endliche Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von B mit offenen Mengen U_i gibt, über denen \mathcal{A} mittels eines Feldes von C^* -Isomorphismen h_i assoziiert ist zu einem stetigen Feld \mathcal{H}_i von Hilberträumen. Über den Schnittmengen $U_i \cap U_j$ ist \mathcal{A} dann sowohl zu \mathcal{H}_i als auch zu \mathcal{H}_j assoziiert, so daß $h_i^{-1}h_j$ ein Feld von Isomorphismen elementarer C^* -Algebren ist und daher von einem Feld von Hilbertraumisomorphismen g_{ij} induziert ist. $g_{ij}g_{jk}$ führt dann über $U_i \cap U_j \cap U_k$ zu denselben C^* -Isomorphismen $h_i^{-1}h_k$ wie g_{ik} , somit gibt es wegen C.2.1.4 eine stetige Funktion $u_{ijk} : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow S^1$ mit $g_{ij}g_{jk} = u_{ijk}g_{ik}$. Dixmier & Douady zeigen, daß die u_{ijk} einen Kozyklus auf B mit Werten in der Garbe $\underline{S^1}$ der (Keime von) stetigen S^1 -wertigen Funktionen definieren, dessen Klasse in $H^2(B, \underline{S^1})$ nur vom gegebenen Feld von C^* -Algebren \mathcal{A} abhängt. In 5.1.4 auf Seite 58 haben wir gesehen, daß $H^2(B, \underline{S^1}) \simeq H^3(B, \mathbb{Z})$ ist. Das Bild von $[u]$ in $H^3(B, \mathbb{Z})$ heißt **Dixmier-Douady-Invariante** $\delta(\mathcal{A})$. Weiterhin beweisen Dixmier & Douady:

C.2.5 Theorem (Dixmier-Douady-Invariante und globale Darstellung)

Sei \mathcal{A} ein stetiges Feld von C^* -Algebren über einer parakompakten Basis. Die Dixmier-Douady-Invariante $\delta(\mathcal{A})$ verschwindet genau dann, wenn es ein stetiges Feld von Hilberträumen über B gibt, so daß \mathcal{A} isomorph ist zum assoziierten Feld von C^* -Algebren.

C.2.6 Theorem ($H^3(M, \mathbb{Z})$ und Klassen von C^* -Feldern)

$H^3(M, \mathbb{Z})$ parametrisiert über die Dixmier-Douady-Invariante die Menge der Äquivalenzklassen von lokal trivialen stetigen Feldern von elementaren C^* -Algebren über B .

C.2.7 Theorem (abzählbar unendlichdimensionale Felder)

Ein stetiges Feld von abzählbar unendlichdimensionalen C^* -Algebren, das die Fell-Bedingung erfüllt, ist lokal trivial, wenn die Basis endlichdimensional und parakompakt ist.

In (Packer & Raeburn, 1990, Theorem 3.9) wird folgendes Theorem bewiesen:

C.2.8 Theorem (Dixmier-Douady-Invariante für getwistete dynamische Systeme)

Sei G eine lokal kompakte Gruppe und X ein (lokal triviales) G -Prinzipalfaserbündel über M mit Aktion α ; für G, X, M gelte das zweite Abzählbarkeitsaxiom. $\Theta \in Z^2(G, C(X, S^1))$ sei ein stetiger 2-Kozyklus. Dann ist $\mathcal{A} := C_\infty(X) \rtimes_{\alpha, \Theta} G$ ein stetiges Feld von C^* -Algebren über M , das die Fell-Bedingung erfüllt, und die Dixmier-Douady-Invariante $\delta(\mathcal{A}) \in H^3(M, \mathbb{Z}) \simeq H^2(M, \underline{S^1})$ wird repräsentiert durch $\mu \in \hat{Z}^2(M, \underline{S^1})$ mit

$$\mu_{ijk}(x) = \Theta(g_{ij}(x), g_{jk}(x))(s_i(x)),$$

wenn (s_i) ein System von lokalen Schnitten von X ist und (g_{ij}) die zugehörigen Übergangsfunktionen.

Literaturverzeichnis

- ASCH, J., OVER, H. & SEILER, R. (1994). Magnetic Bloch analysis and Bochner Laplacians. *J. Geom. Phys.* **13**, Nr. 3, 275–288 5, 5
- ATIYAH, M. F. (1976). Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. *Astérisque* **32–33**, 43–72 4.2
- BIRMAN, M. S. & SUSLINA, T. A. (1998). Two-dimensional periodic magnetic Hamiltonian is absolutely continuous. *St. Petersburg Math. J.* **9**, Nr. 1, 21–32. Englische Übersetzung von Algebra Anal. 1.1.1, 1.3.6
- BLACKADAR, B. (1986). *K-Theory for Operator Algebras*. Springer-Verlag, Berlin B.3
- BOTT, R. & TU, L. W. (1995). *Differential Forms in Algebraic Topology*, Band 82 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin 5.2
- BROWN, K. S. (1994). *Cohomology of Groups*, Band 87 von *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin B.1
- BROWN, L. G. & PEDERSEN, G. K. (1991). C^* -algebras of real rank zero. *J. Funct. Anal.* **99**, Nr. 1, 131–149
- BRÜNING, J. & SUNADA, T. (1992a). On the spectrum of periodic elliptic operators. *Nagoya Math. J.* **126**, 159–171 21
- BRÜNING, J. & SUNADA, T. (1992b). On the spectrum of gauge-periodic elliptic operators. *Astérisque* **210**, 65–74 1.1.2, 1.3.6, 4.2, 4.2, 4.3
- BRÜNING, J. & SUNADA, T. (1996). Twisted group C^* -algebras and the spectrum of gauge-periodic operators. Private Mitteilung 1.3.6, 4.2, 4.2, 21
- BRYLINSKI, J.-L. (1993). *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*. Birkhäuser Verlag, Boston 5, 5.1.6, 5.1
- CAREY, A. L., HANNABUSS, K. C., MATHAI, V. & MCCANN, P. (1998). Quantum Hall effect on the hyperbolic plane. Eingereicht bei Comm. Math. Phys. B.4
- CHOI, M.-D. & ELLIOTT, G. A. (1990). Density of the self-adjoint elements with finite spectrum in an irrational rotation C^* -algebra. *Math. Scand.* **67**, 73–86 12, 2

- COMTET, A. (1987). On the Landau levels on the hyperbolic plane. *Ann. Physics* **173**, 185–209 1.3.6
- CONNES, A. (1994). *Noncommutative Geometry*. Academic Press, New York 16
- DIXMIER, J. (1957). *Les algèbres d'opérateur dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann)*. Gauthiers-Villars, Paris 2.1
- DIXMIER, J. & DOUADY, A. (1963). Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C^* -algèbres. *Bull. Soc. Math. France* **91**, 227–284 C, C.2.4, C.2.4
- EASTHAM, M. S. P. (1973). *The spectral theory of periodic differential equations*. Scottish Academic Press, Edinburgh, London 1.3.6
- ELLIOTT, G. A. & EVANS, D. E. (1993). The structure of the irrational rotation C^* -algebra. *Ann. of Math. (2)* **138**, 477–501 2
- FRANK, M. & MANUILOV, V. M. (1995). Diagonalizing compact operators on W^* -modules. *Z. Anal. Anwendungen* **14**, 33–41 1.4
- GILKEY, P. B. (1995). *Invariance theory, the heat-equation, and the Atiyah-Singer index theorem*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, zweite Auflage 31
- GREEN, P. (1977). C^* -algebras of transformation groups with smooth orbit space. *Pacific J. Math.* **72**, Nr. 1, 71–97
- GRUBER, M. J. (1994). *Das Spektrum des Schrödinger-Operators mit periodischem Magnetfeld und elektrischem Potential. Mathematische und physikalische Aspekte*. Diplomarbeit, Universität Augsburg (Germany) 1
- GRUBER, M. J. (1997). Lückenasymptotik für den Landauoperator auf der oberen Halbebene. Unveröffentlicht 1.3.6
- HELFFER, B. & SJØSTRAND, J. (1989). Semiclassical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **39**, 2–126 1.1
- HEMPEL, R. & HERBST, I. (1995). Bands and gaps for periodic magnetic Hamiltonians. In *Partial differential operators and mathematical physics. International conference in Holzhau, Germany, July 3–9, 1994* (herausgegeben von M. Demuth et al.), Band 87 von *Oper. Theory, Adv. Appl.*, S. 175–184. Birkhäuser Verlag, Basel 1.1.1, 1.3.6, 6, 31
- KAPLANSKY, I. (1953). Modules over operator algebras. *Amer. J. Math.* **75**, 839–853
- KARP, L. & PEYERIMHOFF, N. (1998). Spectral gaps of Schrödinger operators on hyperbolic space. Eingereicht 1.3.6
- KATSUDA, A. & SUNADA, T. (1987). Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface. *Amer. J. Math.* **109**, 145–156 5.2

- KOBAYASHI, T., ONO, K. & SUNADA, T. (1989). Periodic Schrödinger operators on a manifold. *Forum Math.* **1**, 69–79 1.3.6, 1.3.6, 1.3.6
- LANCE, E. C. (1995). *Hilbert C^* -modules: a toolkit for operator algebraists*, Band 210 von *London Mathematical Society lecture note series*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 2.1
- LEPTIN, H. (1967). Verallgemeinerte L^1 -Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen. *Invent. Math.* **4**, 68–86 B.1.4
- LI, S. (1992). *Introduction to Operator Algebras*. World Scientific, Singapore, Philadelphia A.3
- MIŠČENKO, A. S. & FOMENKO, A. T. (1980). The index of elliptic operators over C^* -algebras. *Math. USSR-Izv.* **15**, 87–112. Englische Übersetzung von *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 3.3.3, 3.3.3, 15
- MURPHY, G. J. (1990). *C^* -Algebras and Operator Theory*. Academic Press, San Diego 2.1
- PACKER, J. A. & RAEBURN, I. (1990). Twisted crossed products of C^* -algebras II. *Math. Ann.* **287**, 595–612 B.1.4, C.2
- PASCHKE, W. L. (1973). Inner product modules over B^* -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **182**, 444–468
- QUIGG, J. C. (1986). Duality for reduced twisted crossed products of C^* -algebras. *Indiana Univ. Math. J.* **35**, 549–571 B.1.7
- RUDIN, W. (1962). *Fourier Analysis on Groups*. Nummer 12 in Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers, New York 2.1
- SHUBIN, M. A. (1992). Spectral theory of elliptic operators on non-compact manifolds. *Astérisque* **207**, 37–108 1.3.2, 1.3.6
- SKRIGANOV, M. M. (1979). Proof of the Bethe-Sommerfeld conjecture in dimension two. *Soviet Math. Dokl.* **20**, Nr. 5, 956–959. Englische Übersetzung von *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 1
- SKRIGANOV, M. M. (1985). The spectrum band structure of the tree-dimensional Schrödinger operator with periodic potential. *Invent. Math.* **80**, 102–121 1
- SOBOLEV, A. V. (1997). Absolute continuity of the periodic magnetic Schrödinger operator. Technischer Bericht, University of Sussex 1.3.6
- SUNADA, T. (1992). Group C^* -algebras and the spectrum of a periodic Schrödinger operator on a manifold. *Canad. J. Math.* **44**, 180–193 3.2

- SUNADA, T. (1994). A discrete analogue of periodic magnetic Schrödinger operators. *Contemp. Math.* **173**, 283–299 3.3.1, 3.3.1, 3.3.1
- SWAN, R. G. (1962). Vector bundles and projective modules. *Trans. Amer. Math. Soc.* **105**, 264–277 2.1
- THOMAS, L. E. (1973). Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal. *Comm. Math. Phys.* **33**, 335–343 1.3.6, 1.3.6
- VELIEV, O. A. (1990). On the spectrum of multidimensional periodic operators. *J. Soviet Math.* **49**, 1045–1058. Englische Übersetzung von Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. 1
- WEGGE-OLSEN, N. E. (1993). *K-Theory and C^* -Algebras: a friendly approach*. Oxford University Press, New York, Oxford 11, 5
- WOODHOUSE, N. M. J. (1991). *Geometric Quantization*. Clarendon Press, Oxford, zweite Auflage 5

Index

Symbole

$(\cdot)^*$	115
$(\cdot)^\dagger$	115
$(\cdot)^\times$	115
1_B	115
\mathbb{I}	115
e	115
ι	115
\circ	115

Weitere Symbole **siehe** Buchstaben

A

\mathcal{A} -Pseudodifferentialoperator 41

Äquivalenz

von C^* -Feldern	105
von flachen Linienbündeln	62
von Linienbündeln	58
von Quantisierungen	60, 62, 63

Aktion

eigentlich unstetige	13, 45
freie	13, 45
kokompakte	13, 45

B

Bandstruktur 6

Blocheigenschaft

schwache	5
umgekehrte	5, 74

Blochtheorie

kommutative	
nichtkommutative Form	21
Standardform	12
nichtkommutative	25

Bochner-Laplace-Operator 57

C

\mathbb{C} 115

$C_\infty(X)$ 115

$C_0(X)$ 115

Cantormenge 34

$C_c(X)$ 115

Charaktergruppe 4

Charakterrelationen 16

curv 116

D

Darstellung

getwistete linksreguläre	94
projektive	45
rechtsreguläre	41

$\mathcal{D}(D)$ 116

de-Rham-Klasse, ganzzahlige 59

Determinante, ζ -regularisierte 76

direktes Integral 17

Dixmier-Douady-Invariante 105

E

e 115

F

$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ 27

$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ 84, 85

Feld

meßbares

von Hilberträumen	16
von Operatoren	17

stetiges

assoziertes \sim von C^* -Algebren	104
continuous trace siehe \sim , mit stetiger Spur	
mit stetiger Spur	103
von Banach- und Hilberträumen	102

von C^* -Algebren 103
 Fell-Bedingung 103
 Fluß, magnetischer 2, 65, 67
 Fundamentalbereich 14, 48

G

GNS-Darstellung 86
 der reduzierten getwisteten Gruppenalgebra 94
 eines Hilbert- $C(\hat{\Gamma})$ -Moduls 23
 eines Hilbertmoduls 86
 Gruppen- C^* -Algebra
 getwistete 93
 Gruppenkohomologie 90
 Gruppenkozyklus 90

H

Harperoperator
 verallgemeinerter 40
 Hilbert- $(\mathcal{B}, G, \beta, \theta)$ -Modul 96
 Hilbertlinksmodul 84
 Hilbertmodul **siehe** Hilbertrechtsmodul
 Abschluß eines \tilde{s} 84
 freier 85
 getwistetes verschränktes Produkt
 von \tilde{n} 97
 GNS-Darstellung eines \tilde{s} 86
 projektiver 85
 stetiges Feld als 103
 Hilbertmodulbündel 41
 Hilbertrechtsmodul 83

I

ι 115
 \mathbb{I} 115

J

Jacobitorus 62, 63

K

Kadisonseigenschaft 6
 Kadisonkonstante 6
 $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ 27
 $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ 84, 85

Kasparov- (G, θ', θ) -Modul 96
 $\mathcal{K}(E)$ 116
 Kopplung, minimale 56
 Kozyklusbedingung 46

L

$\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \text{tr}_{\tau})$ 27
 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ 84
 Landauoperator 2
 $\mathcal{L}(E)$ 116
 Lift der Aktion 14
 Linkstranslation
 getwistete 95
 $L^p(X, d\mu)$ 116

M

$M(X, \mu)$ 116

N

\mathbb{N} 115
 \mathbb{N}_0 115

O

\circ 115

Operator

\mathcal{A} -elliptischer
 Spektrum 33, 34
 \mathcal{A} -elliptischer 26
 \mathcal{A} -endlicher **siehe** $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$
 \mathcal{A} -kompakter **siehe** $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$
 abelschperiodischer 14, 73
 Spektrum 20, 73, 77
 adjungierbarer **siehe** $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$
 Bochner-Laplace- **siehe** Bochner-Laplace-Operator
 eichperiodischer 41, 46
 Parametrix 48
 Spektrum 72
 geeicht periodischer **siehe** Operator, periodischer
 mit \mathcal{A} -kompakter Resolvente 26
 periodischer 41, 54, 72
 Spektrum 72

- Schrödinger- **siehe** Schrödingeroperator
 strikt periodischer 72
 zerlegbarer 17, 19
 $\Omega^p(M)$ 116
- P**
 $\pi_1(M)$ 116
 $P_B, B \subset \mathbb{R}$ Borelmenge 116
 $P(\lambda)$ 116
 Produkt
 getwistetes verschränktes 91
 von Hilbertmoduln 97
 reduziertes getwistetes verschränktes 92
- Q**
 Quantisierung, geometrische 57
- R**
 \mathbb{R} 115
 \mathbb{R}_+ 115
 Rang
 reeller 36
 0 mit infinitesimalem Zustand .. 6, 36
 RBP **siehe** Blocheigenschaft, umgekehrte
 Rechtstranslation
 getwistete 93
 Rotationsalgebra 99
 RRl_0 **siehe** reeller Rang 0 mit infinitesimalem Zustand
- S**
 S^1 115
 Schnoleigenschaft
 schwache 5
 starke 6
 superstarke 6
 Schrödingeroperator
 magnetischer
 auf Graphen 40
 auf Mannigfaltigkeiten 54, 57
 eichperiodischer 67, 69, 72
 periodischer 65, 67
 strikt periodischer 67
 spec 116
 spec_{a.c.} 116
 spec_{disc} 116
 spec_{ess} 116
 spec_p 116
 spec_{p.p.} 116
 spec_{s.c.} 116
 Spektralprojektion 116
 Spektraltheorie
 Übersicht 6
 \mathcal{A} -elliptischer Operator **siehe** Operator, \mathcal{A} -elliptischer, Spektrum
 abelsch-periodischer Operator **siehe** Operator, abelsch-periodischer, Spektrum
 eichperiodischer Operator **siehe** Operator, eichperiodischer, Spektrum
 periodischer Operator **siehe** Operator, periodischer, Spektrum
- Spur
 \mathcal{A} -wertige 27
 assoziierte 27
 kanonische 94
 normierte 26
- SSP **siehe** Schnoleigenschaft, starke
 SSSP **siehe** Schnoleigenschaft, superstarke
- System
 getwistetes dynamisches 105
 getwistetes kovariantes 90
- T**
 $(\cdot)^\dagger$ 115
 TM 116
 T^n 116
 Tomita-Takesaki-Involution 87
 Torsionstorus 64
 tr_τ -Spurklasse **siehe** $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{E}, \text{tr}_\tau)$
- W**
 WBP **siehe** Blocheigenschaft, schwache

WSP **siehe** Schnoleigenschaft, schwache

X

$(\cdot)^\times$ 115

Z

\mathbb{Z} 115

Notation

Generell wurde versucht, die übliche Notation zu verwenden und dabei Mißverständnisse zu vermeiden. So bezeichnet für einen topologischen Raum X $C_c(X)$ die Menge der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, $C_\infty(X)$ die stetigen im Unendlichen verschwindenden; die Bezeichnung $C_0(X)$ wird aus naheliegenden Gründen vermieden.

Hilberträume sind Hilbert- \mathbb{C} -Moduln gemäß Definition A.1.1 und daher Rechtsmoduln, so daß das Skalarprodukt gemäß der in der mathematischen Physik üblichen Konvention linear im rechten und antilinear im linken Eintrag ist.

Weitere Standardbezeichnungen:

\mathbb{I}	identische Abbildung
\circ	Verknüpfung von Abbildungen
1_B	charakteristische Funktion der Menge B
\setminus	Mengendifferenz
$\overline{}$	Abschluß einer Menge/eines Operators; komplexe Konjugation
D^\dagger	formal Adjungierter eines Operators D
D^*	Hilbertraum-Adjungierter eines Operators D
A'	Kommutant einer Unteralgebra
G_0	Zusammenhangskomponente der Eins einer topologischen Gruppe G
e	Einselement einer Gruppe
\hat{G}	Äquivalenzklassen eindimensionaler unitärer Darstellungen einer topologischen Gruppe G (Charaktergruppe für abelsches G)
ι	$\sqrt{-1}$
\mathbb{N}	natürliche Zahlen (ohne 0)
\mathbb{N}_0	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{R}_+	$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
R^\times	multiplikative Gruppe eines Rings R
S^1	$= \{z \in \mathbb{C} \mid \ z\ = 1\}$

T^n	$= (S^1)^n$
TM	Tangentialraum einer glatten Mannigfaltigkeit M
$\pi_1(M)$	Fundamentalgruppe einer topologischen Mannigfaltigkeit M
$\Omega^p(M)$	Differentialformen vom Grad p
$\text{curv}(\nabla)$	$= \nabla^2$ Krümmung eines Zusammenhangs ∇
$\mathcal{D}(D)$	Definitionsbereich eines unbeschränkten Operators D
$\mathcal{K}(E)$	komakte Operatoren auf einem Banachraum E
$\mathcal{L}(E)$	lineare beschränkte Operatoren auf einem Banachraum E
$M(X, \mu)$	Raum der meßbaren Funktionen auf dem Maßraum (X, μ)
$L^p(X, d\mu)$	Raum der bezüglich $d\mu$ p -integrablen Funktionen
spec	Spektrum eines Operators
spec_p	Punktspektrum
spec_{disc}	diskretes Spektrum (isolierte Eigenwerte endlicher Vielfachheit)
spec_{ess}	wesentliches Spektrum ($\text{spec} \setminus \text{spec}_{disc}$)
$\text{spec}_{p.p.}$	„pure point“-Spektrum (Abschluß von spec_p)
$\text{spec}_{a.c.}$	absolutstetiges Spektrum
$\text{spec}_{s.c.}$	singulärstetiges Spektrum

Die Konvention für Spektralprojektionen ist wie folgt: Ist D ein Operator, so setzen wir $P(\lambda) := 1_{(-\infty, \lambda]}(D)$, d. h. $(P(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ist die rechtstetige Spektralschar. Für beliebige Borelmengen $B \subset \mathbb{R}$ ist $P_B := 1_B(D)$, insbesondere ist $P_{(-\infty, \lambda]} = P(\lambda)$. Das Spektralmaß zu zwei Vektoren $x, y \in \mathcal{D}(D)$ ist dann $\mu_{x,y}(\lambda) := \langle x | P(\lambda) y \rangle$.

Auf weitere Bezeichnungen wird im Index verwiesen.

Kapitel, Abschnitte und Unterabschnitte werden mit arabischen Ziffern nummeriert und in der Form 2, 2.1 und 2.1.9 zitiert. Gleichungen werden innerhalb der Abschnitte fortlaufend nummeriert und zur besseren Unterscheidung mit einem Mittelpunkt abgetrennt (2.1·11). Ein Beweisende wird mit \square markiert oder mit $\boxed{2.1.9}$, wenn der Beginn des Satzes 2.1.9 und das Beweisende nicht auf dieselbe Seite fallen.

Lebenslauf

Name:

Michael Johannes Gruber

Geburtsdatum, -ort:

06.01.1970 in Stuttgart

Eltern:

Josef Gruber, Diplom-Ingenieur

Irmgard Gruber, geb. Pfeifer, Arzthelferin

Schulbesuche:

1976–1980 Grundschule: Friedrich-Ebert-Schule in Augsburg–Göggingen

1980–1989 Gymnasium: Humanistisches Gymnasium bei St. Stephan in Augsburg

1989 Abitur (1,0)

Studium:

1989–1994 Studium der Diplom-Physik mit Nebenfach Mathematik an der Universität Augsburg

1991 Vordiplom (1,42)

1994 Diplom (1,05)

Stipendium:

01.11.1993–31.10.1994 Stipendium der Stiftung der Universität Augsburg

Berufstätigkeit:

01.11.1990–28.02.1991, 01.05.–31.07.'91, 01.11.'91–29.02.'92, 01.11.'92–28.02.'93,

15.09.1994–31.10.1994 Nebenberufliche studentische Hilfskraft am Institut für Mathematik der Universität Augsburg

01.11.1993–28.02.1994 Nebenberufliche studentische Hilfskraft am Institut für Physik der Universität Augsburg

01.11.1994–30.09.1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Universität Augsburg

01.10.1995–31.12.1995 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin

01.01.1996–31.12.1998 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der

Humboldt-Universität zu Berlin im Teilprojekt D6 des Sonderforschungsbereichs „Differentialgeometrie und Quantenphysik“ (SFB 288)

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe.

Berlin, den 7. April 1998

Michael J. Gruber